Var.
348
t303

Aus Natur und Geisteswelt

303

A. v. Ihering

Die Mechanik der festen Körper

B. G. Teubner · Leipzig · Berlin

Var. 3481 (303.

Die Sammlung

„Aus Natur und Geisteswelt"

verdankt ihr Entstehen dem Wunsche, an der Erfüllung einer bedeutsamen sozialen Aufgabe mitzuwirken. Sie soll an ihrem Teil der unserer Kultur aus der Scheidung in Kasten drohenden Gefahr begegnen helfen, soll dem Gelehrten es ermöglichen, sich an weitere Kreise zu wenden, und dem materiell arbeitenden Menschen Gelegenheit bieten, mit den geistigen Errungenschaften in Fühlung zu bleiben. Der Gefahr, der Halbbildung zu dienen, begegnet sie, indem sie nicht in der Vorführung einer Fülle von Lehrstoff und Lehrsätzen oder etwa gar unerwiesenen Hypothesen ihre Aufgabe sucht, sondern darin, dem Leser Verständnis dafür zu vermitteln, wie die moderne Wissenschaft es erreicht hat, über wichtige Fragen von allgemeinstem Interesse Licht zu verbreiten, und ihn dadurch zu einem selbständigen Urteil über den Grad der Zuverlässigkeit jener Antworten zu befähigen.

Es ist gewiß durchaus unmöglich und unnötig, daß alle Welt sich mit geschichtlichen, naturwissenschaftlichen und philosophischen Studien befasse. Es kommt nur darauf an, daß jeder an einem Punkte die Freiheit und Selbständigkeit des geistigen Lebens gewinnt. In diesem Sinne bieten die einzelnen, in sich abgeschlossenen Schriften eine Einführung in die einzelnen Gebiete in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische.

In den Dienst dieser mit der Sammlung verfolgten Aufgaben haben sich denn auch in dankenswertester Weise von Anfang an die besten Namen gestellt. Andererseits hat dem der Erfolg entsprochen (Absatz bis 1. I. 1914 ca. 2 Millionen Exemplare), so daß viele (ca. 150) der Bändchen bereits in 2.—6. Auflage vorliegen. Damit sie stets auf die Höhe der Forschung gebracht werden können, sind die Bändchen nicht, wie die anderer Sammlungen, stereotypiert, sondern werden — was freilich die Aufwendungen sehr wesentlich erhöht — bei jeder Auflage durchaus neu bearbeitet und völlig neu gesetzt.

So sind denn die schmucken, gehaltvollen Bände durchaus geeignet, die Freude am Buche zu wecken und daran zu gewöhnen, einen kleinen Betrag, den man für Erfüllung körperlicher Bedürfnisse nicht anzusehen pflegt, auch für die Befriedigung geistiger anzuwenden. Durch den billigen Preis ermöglichen sie es tatsächlich jedem, auch dem wenig Begüterten, sich eine kleine Bibliothek zu schaffen, die das für ihn Wertvollste „Aus Natur und Geisteswelt" vereinigt.

Die meist reich illustrierten Bändchen sind
in sich abgeschlossen und einzeln käuflich

Werke, die mehrere Bändchen umfassen, auch in einem Band geb.

Jedes Bändchen geheftet M. 1.—, in Leinwand gebunden M. 1.25

Leipzig **B. G. Teubner**

Jedes Bändchen geheftet M. 1.—, in Leinw. gebunden M. 1.25

Angewandte Naturwissenschaft. Technik.

Die Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bde. Mit zahlreichen Abb. (Bd. 125, 126.) (Auch in 1 Bd. geb.)

i. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abb. (Bd. 125.)

ii. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abbildungen. (Bd. 126.)

Chemie in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 3. Aufl. (Bd. 76.)

Desinfektion, Sterilisation, Konservierung. Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. (Bd. 401.)

Physik in Küche und Haus. Von Prof. Dr. H. Speitkamp. (Bd. 478.)

Die Schmucksteine und die Schmuckstein-Industrie. Von Dr. A. Eppler. Mit 64 Abb. (Bd. 376.)

Die Spinnerei. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)

Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. (Bd. 332.)

Die Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)

Der Tabak. Anbau, Handel und Verarbeitung. Von Jak. Wolf. (Bd. 416.)

Agrikulturchemie. Von Dr. P. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)

Farben und Farbstoffe, ihre Erzeugung und Verwendung. Von Dr. A. Zart. (Bd. 483.)

Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)

Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. (Bd. 227.)

Der Luftstickstoff und seine Verwertung. Von Prof. Dr. K. Kaiser. Mit 13 Abb. (Bd. 313.)

Bilder aus der chemischen Technik. Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)

Heizung und Lüftung. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abbildungen. (Bd. 241.)

Das moderne Beleuchtungswesen. Von Ing. Dr. H. Lux. Mit 54 Abb. (Bd. 433.)

Am sausenden Webstuhl der Zeit. Von Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)

Das Perpetuum mobile. Von Dr. Fr. Ichak-Rubiner. (Bd. 462.)

Bilder aus der Ingenieurtechnik. Von Baurat K. Merckel. Mit 43 Abb. (Bd. 60.)

Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. Von Geh. Reg.-Rat M. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)

Maschinenelemente. V. Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. Aufl. Mit 184 Abb. (Bd. 301.)

Die Dampfmaschine. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde.

i. Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 393.)

ii. Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. Mit 93 Abb. (Bd. 394.)

Industrielle Feuerungsanlagen und Dampfkessel. Von Ingenieur J. E. Mayer. (Bd. 348.)

Die neueren Wärmekraftmaschinen. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde.

i. Einführung in die Theorie und den Bau der Maschinen für gasförmige und flüssige Brennstoffe. 4. Aufl. Mit 33 Abb. (Bd. 21.)

ii. Gaserzeuger, Großgasmaschinen, Gas- und Dampfturbinen. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 86.)

Die Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der **Wasserkräfte.** Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 2. Aufl. Mit 57 Abb. (Bd. 228.)

Die elektrische Kraftübertragung. Von Ing. P. Köhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)

Die Wirtschaftlichkeit der Kraftanlagen. Von M. Gercke. (Bd. 425.)

Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Prof. Dr. G. Fischer. Mit 62 Abb. (Bd. 316.)

Jedes Bändchen geheftet M. 1.—, in Leinw. gebunden M. 1.25

Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 67 Abb. (Bd. 196.)

Das Eisenbahnwesen. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinspektor a. D. E. Biedermann. 2. Aufl. Mit 56 Abb. (Bd. 144.)

Die Klein- und Straßenbahnen. Von Oberingenieur a. D. A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)

Grundlagen der Elektrotechnik. Von Dr. A. Kotth. Mit 72 Abb. (Bd. 391.)

Die Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 58 Abb. (Bd. 235.)

Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)

Die Funkentelegraphie. Von Oberpostpraktikan H. Thurn. Mit 58 Abb. 2. Aufl. (Bd. 167.)

Nautik. Von Dir. Dr. J. Möller. Mit 58 Abb. (Bd. 255.)

Das Kriegsschiff. Von Geh. Marinebaurat Krieger. (Bd. 389.)

Die Luftfahrt, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. von Dr. F. Huth. Mit 60 Abb. (Bd. 300.)

Das Automobil. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ingenieur K. Blau. 2. Aufl. Mit 83 Abb. (Bd. 166.)

Chemie und Technologie der Sprengstoffe. Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)

Der Krieg im Zeitalter des Verkehrs und der Technik. Von Hauptmann A. Meyer. Mit 3 Abb. (Bd. 271.)

Die Handfeuerwaffen. Ihre Entwicklung und Technik. Von Hauptmann R. Weiß. Mit 69 Abb. (Bd. 364.)

Die Uhr. Von Reg.-Bauführer a. D. H. Bock. Mit 47 Abb. (Bd. 216.)

Die Rechenmaschine. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. (Bd. 490.)

Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 3. Aufl. Mit 7 Tafeln und 26 Abb. (Bd. 175.)

Die Photographie, ihre wissenschaftlichen Grundlagen und ihre Anwendung. Von Dr. O. Prelinger. Mit 65 Abb. (Bd. 414.)

Die künstlerische Photographie. Ihre Entwicklung, ihre Probleme, ihre Bedeutung. Von Dr. W. Warstat. Mit Bilderanhang (12 Tafeln). (Bd. 410.)

Die Kinematographie. Von Dr. H. Lehmann. (Bd. 358.)

Die Baustoffe des Hauses, ihre Eigenschaften, Verwendung und Erhaltung. Von Prof. M. Grundt. (Bd. 447.)

Der Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. Mit 81 Abb. (Bd. 275.)

Die Kälte, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. H. Alt. Mit 45 Abb. (Bd. 311.)

Das Eisenhüttenwesen. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 4. Aufl. Mit 15 Fig. (Bd. 20.)

Das Wohnhaus. Von Reg.-Baumeister a. D. G. Langen. 2 Bde. (Bd. 444, 445.) Bd. I: Sein technischer Aufbau. Bd. II: Seine Anlage und Ausgestaltung.

Die Gartenstadtbewegung. Von Generalsekretär H. Kampffmeyer. Mit 43 Abb. 2. Aufl. (Bd. 259.)

Geschichte der Gartenkunst. Von Reg.-Baumeister Chr. Rauch. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)

Aus Natur und Geisteswelt
Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen
303. Bändchen

Die Mechanik
der festen, flüssigen und gasförmigen Körper

I. Teil
Die Mechanik der festen Körper

von
Albrecht von Ihering
Geheimem Regierungsrat

Mit 61 Abbildungen im Text

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig 1910

2843/659

Bayerische Staatsbibliothek

<36645258960011

Copyright 1910
by B. G. Teubner in Leipzig.

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Vorwort.

Ein Handbuch der Mechanik, welches die Aufgabe erfüllen soll, in dem beschränkten Umfang von kaum mehr als 100 Seiten den gebildeten Laien in das schwierige und ungemein vielseitige Gebiet der Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper einzuführen, muß von vornherein darauf verzichten, auch nur den Versuch machen zu wollen, etwas Erschöpfendes und Vollständiges zu bringen. Vielmehr kann ein solches Büchlein nur den Zweck verfolgen, die wichtigsten Grundsätze der Mechanik anzugeben, dieselben an besonders lehrreichen Anwendungsbeispielen zur Anschauung zu bringen, und an einfachen Berechnungen zu zeigen, wie die Hauptgleichungen, in welche sich die wichtigsten Lehrsätze fassen lassen, zur Anwendung zu bringen sind.

Wenn daher auch keine weiteren mathematischen Kenntnisse vorausgesetzt werden durften, als diejenigen, wie sie auf deutschen Mittelschulen erworben werden, so war es trotzdem in den meisten Fällen möglich, mit diesen elementaren Hilfsmitteln die meisten Probleme der Statik und Dynamik in mathematische Form zu kleiden.

Ein sehr wertvolles Hilfsmittel, welches die Anschauung und das Verständnis wesentlich erleichtert, die graphische Darstellung und die graphische Methode ist namentlich in der Behandlung der Statik zur Anwendung gekommen und dürften dadurch manche Probleme, so die Untersuchung der Beanspruchungen von Fachwerken und ungleichmäßig belasteten Trägern in klarer und einfacher Weise zur Kenntnis des Lesers gebracht sein, welche auf rechnerischem Wege komplizierter Formeln und Berechnungen bedurft hätten.

Da das Studium der Mechanik namentlich für angehende Techniker von größtem Interesse ist, so sind die meisten Anwendungsbeispiele auch aus dem Gebiete der Technik gewählt. Das Büchlein dürfte daher auch für solche Leser, welche sich auf das Studium der Mechanik vorbereiten wollen, zur Einführung in dieselbe von Nutzen sein können.

Aber auch solchen Laien, welche sich in ihrer beruflichen Tätigkeit häufig mit technischen Fragen befassen müssen, wie Juristen, Verwaltungsbeamten, kaufmännischen Angestellten oder Besitzern industrieller Werke kann es zur Beurteilung mancher technischen Frage eine willkommene Handhabe bieten. Es ist hierbei besonders an das Kapitel über die Arbeit der Kräfte und über die technischen Einheiten der Mechanik, der Wärmelehre und der Elektrotechnik und ihre gegenseitigen Beziehungen zueinander gedacht.

Landschlacht am Bodensee, im Dezember 1909.
(Kanton Thurgau, Nord-Schweiz.)

A. von Ihering.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Die Statik.

Seite

Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Die Wirkungsweise der Kräfte 4
A. Wirkung der Kräfte in einer Linie 4
B. Wirkung der Kräfte in einer Ebene 6
Die Hebel 13
Die Wage 17
Parallele Kräfte in der Ebene 22

Zweites Kapitel.

Die Kräftepaare 24

Drittes Kapitel.

Das Gleichgewicht der biegsamen Körper 26

Viertes Kapitel.

Die Kräftewirkungen am starren, gestützten Körper 35

Fünftes Kapitel.

Die Schwerkraft und der Schwerpunkt 39
1. Bestimmung des Schwerpunkts von Linien . . . 42
2. Bestimmung des Schwerpunkts von Flächen . . 42
a) Die Dreiecksfläche . . 42
b) Quadrat, Rechteck und Parallelogramm . . . 43
c) Das Trapez 43
d) Das allgemeine Viereck 43
3. Bestimmung des Schwerpunkts von Körpern . . 46

Sechstes Kapitel.

Die Belastungsmomente und die Momentenflächen . 46

Zweiter Teil.

Die Dynamik.

Seite

Einleitung 50

Erster Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes 54

Erstes Kapitel.

Die freie Bewegung . . 54
A. Allgemeine Betrachtungen 54
B. Der freie Fall 62
C. Die Wurfbewegung . . 65

Zweites Kapitel.

Die gezwungene Bewegung 71
A. Allgemeine Betrachtungen 71
B. Die Bewegung auf kreisförmiger Bahn 72
C. Die Pendelbewegung . . 74
D. Die Bewegung auf der schiefen Ebene 78
E. Der Schubkurbelmechanismus 82
F. Das Kurbelviereck . . . 86
G. Die oszillierende Kurbelschleife 89
H. Die unrunden oder elliptischen Räder 91

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung der materiellen Körper . . 94

Drittes Kapitel.

Das d'Alembertsche Prinzip 94

Viertes Kapitel.

Die Arbeit der Kräfte . 96

Fünftes Kapitel.

Die Trägheitsmomente . 104

Sechstes Kapitel.

Die Reibung . . . 106
1. Die gleitende Reibung . 108
2. Die rollende Reibung . 108

Siebentes Kapitel.

Die Lehre vom Stoß . 111

Sachregister 113

Bayerische Staatsbibliothek München

Erster Teil.

Die Statik.

Einleitung.

Die Mechanik ist die Lehre von den Gesetzen, nach welchen die Körper im Raume sich entweder im Ruhezustand oder in der Bewegung befinden. Der Ruhezustand kann entweder ein absoluter sein, wenn sowohl der Körper selbst als auch seine Umgebung sich nicht bewegt, oder ein relativer, wenn zwar der Körper selbst sich in Ruhe befindet, aber seine Umgebung oder der Körper, mit welchem er zunächst in Berührung ist, sich bewegt.

Da jeder Körper im Raume einen bestimmten Platz einnimmt, der sein Ort im Raume heißt, so kann man auch sagen, daß Bewegung eines Körpers die Ortsveränderung desselben im Raume ist, während im Ruhezustand eine solche nicht erfolgt.

Ein Bauwerk, an einen festen Ort im Raume dauernd gebunden, ist also in bezug auf seine örtliche Umgebung in Ruhe. Da jedoch die Erde mit allen, mit ihr festverbundenen Körpern sich im Weltenraum fortgesetzt bewegt, so ist der Ruhezustand aller Körper, welche mit der Erdoberfläche fest verbunden sind, nur ein relativer.

In absoluter Ruhe befinden sich im Weltenraume eigentlich keine Körper, denn auch der Mittelpunkt unseres Planetensystems, die Sonne, bewegt sich[1]), und auch von den sogenannten Fixsternen ist nachgewiesen, daß sie geringe Eigenbewegungen zeigen.

In den folgenden Untersuchungen soll jedoch die Erde als im absoluten Ruhezustand befindlich angenommen werden, und sollen die Bewegungsgesetze nur in bezug auf diesen Zustand abgeleitet werden.

Unter dieser Voraussetzung befindet sich also ein in der Erde fundiertes Bauwerk in Ruhe, während ein Fahrzeug, z. B. ein Eisenbahnzug, ein Dampfschiff, ein Luftballon seinen Ort im Raume

1) Die Sonne dreht sich um ihre eigene Achse in 25 Tagen 5 Stunden 38 Minuten und bewegt sich ferner nach einem Punkte des Himmelsgewölbes zu, dessen Lage zur Sonne bestimmt ist.

fortwährend ändert, wenn es ſeinem Zwecke des Körpertransportes dienen ſoll.

Entſprechend den drei Aggregatzuſtänden der Körper, dem feſten, flüſſigen und gasförmigen Zuſtande, zerfällt auch die Mechanik in drei Hauptteile, in diejenige der feſten Körper, in diejenige der flüſſigen Körper oder Hydromechanik oder Hydraulik und diejenige der gas- oder luftförmigen Körper oder Aeromechanik, jede dieſer Klaſſen aber wieder in die Gleichgewichts- und Bewegungslehre, ſo daß ſich folgende ſechs Hauptteile der Mechanik ergeben:

1. Mechanik der feſten Körper, Geomechanik[1]),
   a) Geoſtatik,
   b) Geodynamik;
2. Mechanik der flüſſigen Körper, Hydromechanik[2]), Hydraulik,
   a) Hydroſtatik,
   b) Hydrodynamik, ſpezielle Hydraulik;
3. Mechanik der gasförmigen Körper, Aeromechanik[3]),
   a) Aeroſtatik,
   b) Aerodynamik.

Um einen Körper aus ſeinem Ruhezuſtand in den Bewegungszuſtand zu verſetzen, zu bewegen, bedarf es nun der Einwirkung einer Kraft, der bewegenden Kraft. Sei es, daß ein Stein fortgewälzt wird, oder ein Wagen gezogen, oder eine Schiebekarre geſchoben, oder eine Laſt gehoben wird, immer muß eine Kraft von beſtimmter Größe und beſtimmter Richtung wirkſam ſein, um den gewünſchten Zweck, die Ortsveränderung des Körpers nach einer beſtimmten Richtung hin, in einer beſtimmten Zeit zu erreichen. Auf jeden bewegten Körper wirken alſo ſtets eine oder mehrere beſtimmte Kräfte ein. Man hat es alſo bei der Unterſuchung der Geſetze der Bewegung mit drei Größen zu tun, mit räumlichen Ausdehnungen, mit der Zeit, innerhalb welcher die Bewegung vor ſich gehen ſoll, und mit Kräften, welche auf den zu bewegenden Körper wirken.

---

1) Nach dem griechiſchen Worte γηα — Gäa — die Erde.
2) Nach dem griechiſchen Worte ὑδωρ — Hydor — das Waſſer.
3) Nach dem griechiſchen Worte ἀηρ — Aär — die Luft.
Im vorliegenden Bändchen ſoll nur die Mechanik der feſten Körper behandelt werden, während diejenige der flüſſigen und luftförmigen Körper in beſonderem Bändchen werden behandelt werden.

Soll ein Wagen von bestimmtem Gewicht (z. B. mit Sand, Kohlen oder anderen Lasten beladen) in einer Stunde einen Weg von z. B. 5 km Länge zurücklegen, so muß vor demselben eine ganz bestimmte Kraft, die *Zugkraft* wirken, welche durch ein *Zugtier*, Pferd oder ein anderes Tier, ausgeübt wird. Ebenso spricht man bei Eisenbahnzügen von der Zugkraft der Lokomotive, womit genau angegeben ist, welche Lasten dieselbe auf ebener Bahn in bestimmter Zeit fortschaffen kann.

Es wäre nun aber falsch, zu schließen, daß ein Körper, welcher in Ruhe ist, keinerlei Kräften ausgesetzt sei. Ein einfacher Versuch der Elementarphysik lehrt das Gegenteil. Ein Stein, welcher in freier Luft festgehalten wird, fällt, sobald er losgelassen wird, zur Erde nieder. Dasselbe ist mit *allen Körpern*, seien es feste, flüssige oder gasförmige Körper ohne Ausnahme der Fall. Bei den gasförmigen Körpern, welche meistens leichter sind als die atmosphärische Luft, ist diese Erscheinung weniger leicht zu beobachten wie bei den festen und flüssigen Körpern. Indessen lehren die Versuche der Physik, welche mit luftleeren und mit Gas gefüllten Gefäßen angestellt sind, daß auch auf die gasförmigen Körper dasselbe Naturgesetz Anwendung findet.

Es ist also stets eine Kraft vorhanden, welche die Körper zur Erdoberfläche hinzieht, die *Anziehungskraft der Erde*. Dieselbe wirkt also auch auf den in Ruhe befindlichen Körper. Außerdem kann der Körper auch noch von *anderen* Kräften beansprucht sein und doch in Ruhe sein.

Lehnt man einen schweren Baustein oder Balken gegen eine Mauer oder gegen einen Baum, so wird der erstere dauernd gegen letztere „drücken", obgleich beide Körper dauernd in Ruhe sind. Spannt man ein Seil zwischen zwei Bäumen auf und hängt an dasselbe eine Last, so befindet sich sowohl die Last als auch die Bäume nach Beendigung der Aufhängung in Ruhe, trotzdem werden beide Bäume von der am Seile hängenden Last gezogen. Aber es herrscht *Gleichgewicht* zwischen der Last am Seil und den Bäumen, d. h. die in diesem System wirksamen *Kräfte stehen gegenseitig im Gleichgewicht*. Es ist nun die Aufgabe der *Statik*, die Gesetze zu untersuchen, nach welchen die auf einen Körper oder ein System von Körpern wirkende Kräfte im Gleichgewicht sind.

Zur Erleichterung und Vereinfachung dieser Untersuchungen werden dieselben jedoch zunächst für einen sehr kleinen, als gewichtslos angesehenen Körper, den sogenannten *materiellen Punkt*, an-

gestellt und erst später auf die räumlich begrenzten Körper ausgedehnt.

Die Hauptaufgabe, welche der Statik also zufällt, ist die Lösung der Frage, unter welchen Bedingungen die auf einen Punkt oder Körper wirkenden äußeren Kräfte keine Bewegung hervorbringen, also gegenseitig im Gleichgewichte sind.

1. Kapitel.

Die Wirkungsweise der Kräfte.

Nach den drei Dimensionen des Raumes, der linearen, der Flächenausdehnung und der dreidimensionalen oder körperlichen Ausdehnung kann man drei Wirkungsarten der Kräfte unterscheiden, welche auch im folgenden behandelt werden sollen:

A. Die Kräfte wirken alle in einer und derselben Linie.
B. Die Kräfte wirken in einer und derselben Ebene.
C. Die Kräfte wirken in einem und demselben Körper aufeinander.

A. Wirkung der Kräfte in einer Linie.

Auf den Punkt A, Fig. 1, wirkt nach links die Kraft P_1, nach rechts die Kraft P_2, jedoch beide in ein und derselben geraden Linie. Es sei z. B. die Kraft $P_1 = 10$ kg und die Kraft $P_2 = 6$ kg.

Es ist sofort ohne weiteres klar, daß, da die nach links ziehende Kraft P_1 größer als die nach rechts ziehende Kraft P_2 ist, der Punkt A nicht auf seiner Stelle stehen bleiben kann, sondern sich, da links mit einer um $10 - 6 = 4$ kg größeren Kraft gezogen wird, nach links bewegen muß. Es ist aber hieraus auch ferner sofort klar, daß der Punkt A nur dann in Ruhe, die Kräfte also im Gleichgewichtszustand sich befinden können, wenn beide Kräfte, die nach entgegengesetzter Richtung wirken, einander gleich sind, also $P_1 = P_2$ ist.

Denkt man sich nun die Kräfte nicht in einer geraden, sondern in einer gebrochenen Linie auf den Punkt A wirkend, wie es in Fig. 2 dargestellt ist, so ist die Wirkung die, daß die beiden gleichen, aber entgegengesetzten Kräfte den Punkt A zu heben suchen werden, und zwar so lange, bis beide Kräfte PP wieder in einer geraden Linie nach entgegengesetzter Richtung wirken, da sie nur so im Gleichgewicht sind. Man erhält somit folgenden Lehrsatz:

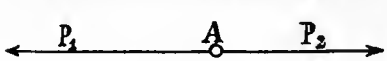


Fig. 1.

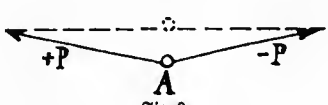


Fig. 2.

„Ein materieller Punkt oder Körper ist nur dann in Ruhe, wenn die Wirkung einer auf ihn wirkenden Kraft durch die Wirkung einer gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft aufgehoben wird."

Wenn aber ein Körper, Stein, Gewicht o. dgl. auf der Erde liegt, so ist er doch scheinbar in Ruhe, ohne daß er von zwei gleichen, entgegengesetzt gerichteten Kräften beansprucht wird.

Die folgende Untersuchung wird lehren, daß auch hier der oben ausgesprochene Lehrsatz seine volle Gültigkeit behält.

In Fig. 3 stelle A einen materiellen Punkt dar, der jedoch vorübergehend ein bestimmtes Gewicht G haben, z. B. 10 kg schwer sein soll. Mit diesem Gewicht drücke er auf die Platte eines Tisches T, welcher mit vier Füßen F auf dem Fußboden aufsteht.

Das Gewicht des Punktes A wird also von den vier Füßen F aufgenommen. Auch ist aus der Erfahrung bekannt, daß, wenn der Tisch plötzlich fortgezogen würde, der Stein sofort zur Erde fallen würde.

Die vier Füße des Tisches haben also zusammen das Gewicht des Punktes A zu tragen; wären sie hierzu nicht stark genug, so würden sie zusammenbrechen. Es müssen also, damit der Punkt A im Gleichgewicht ist, in den vier Füßen vier Kräfte nach oben wirken, um den Stein zu tragen. Denkt man sich aber statt der vier Füße F nur einen Fuß F_1 angebracht, und zwar seitlich, unter dem Tisch T, so würde der Tisch zweifellos umfallen. Nur dann, wenn der Fuß gerade unter dem Punkte A liegt, oder — wissenschaftlich ausgedrückt — wenn die Richtung der Kraft (des Gewichtes) G in die Richtung des Fußes F_1 fällt, befindet sich der Tisch in Ruhe.

Es folgt somit hieraus, daß der Schwerkraft oder dem Gewicht G eine Kraft entgegenwirken muß, welche genau ebenso groß, aber genau entgegengesetzt gerichtet sein muß, damit der Punkt A sich im Gleichgewicht befinde.

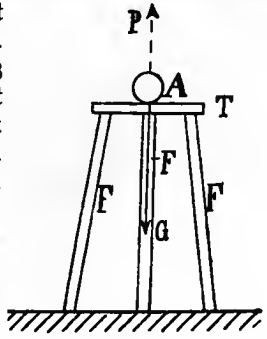


Fig. 3.

Man könnte sich z. B. auch denken, daß der Punkt A an einem Seil aufgehängt wäre, dann müßte eine Kraft P in demselben nach oben ziehen, um den Punkt A, wenn der Tisch fortgenommen würde, in Ruhe zu erhalten.

Man nennt nun diese Kraft, welche der Schwerkraft entgegenwirkt, die Reaktions- oder Gegendruckwirkung der Kraft, und muß dieselbe stets auf, in

und über der Erde, ja auch im Weltenraume, also räumlich völlig unbeschränkt, genau so vorhanden sein, wie dies bei der Schwerkraft der Fall ist, wenn die Einwirkung derselben aufgehoben und ein Körper in Ruhe oder im Gleichgewicht beharren soll. Es wird bei Besprechung des Problems des Schwimmens im flüssigen und Schwebens im luftförmigen Medium hierauf noch näher einzugehen sein.

Kürzer läßt sich der erste Lehrsatz auch folgendermaßen aussprechen:

„Kraft und Gegenkraft (Aktion und Reaktion) sind stets gleich, aber entgegengesetzt gerichtet."

B. Wirkung der Kräfte in einer Ebene.

Während bei der Wirkung der Kräfte in einer Linie nur zwei Kräfte möglich waren, welche an einen Punkte angriffen und für den — hier allein in Betracht kommenden — Gleichgewichtszustand gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, können in einer Ebene beliebig viele Kräfte wirken. Sie können gleich oder entgegengesetzt sein oder unter einem Winkel aufeinander wirken, können alle gleich oder verschieden groß sein, an demselben oder an verschiedenen Punkten der Ebene angreifen. Nur die eine Bedingung müssen sie alle erfüllen, daß ihre Richtungslinien alle in dieselbe Ebene fallen.

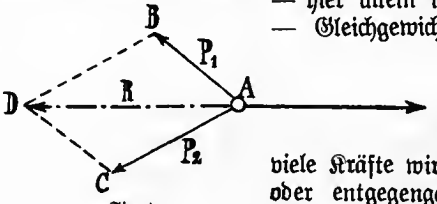


Fig. 4.

In Fig. 4 ist zunächst der einfachste Fall von zwei, unter einem beliebigen Winkel auf den materiellen Punkt A wirksamen Kräften P_1 und P_2 dargestellt.

Die eine Kraft P_1 sucht den Punkt A nach B zu ziehen, die andere P_2 nach C, in Wirklichkeit jedoch bewegt sich der Punkt in der Richtung der Linie AD. Man nennt diese Richtung die Diagonale des Kräfteparallelogramms und erhält den Punkt D, indem von B und C Parallelen zu P_1 und P_2 gezogen werden. Die Linie AD gibt jedoch nicht nur die Richtung der Bewegung an, sondern in ihrer Länge auch die Größe der Kraft an, welche in ihrer Wirkung derjenigen der Kräfte P_1 und P_2 gleich ist und die Mittelkraft, Resultierende oder Resultante, R, der beiden Kräfte heißt.

Man nennt die Kräfte P_1 und P_2 die Einzelkräfte oder Komponenten der Kraft R.

Soll jedoch — wie vorausgesetzt — der Punkt A sich nicht bewegen, so muß in der Richtung von AD, aber entgegengesetzt zu R eine Gegenkraft $-R$ noch angebracht werden, damit der Punkt A in Ruhe und die Kräfte P_1 und P_2 mit dieser dritten Kraft im Gleichgewicht sind.

Man kann aber auch die Kräfte P_1 und P_2 wieder selbst als Mittelkräfte je zweier anderer Kräfte ansehen und erhält dann den in Fig. 5 dargestellten Zusammenhang der Kräfte.

Die Kraft P_1 läßt sich in der Richtung der Resultanten AD und senkrecht dazu in die Kräfte h_1 und v_1, und ebenso die Kraft P_2 in die Kräfte $AG = h_2$, und $AF = v_2$ zerlegen. Dann greifen bei A an: senkrecht nach oben die Kraft v_1, senkrecht nach unten die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft v_2, welche sich gegenseitig aufheben oder das Gleichgewicht halten, nach links die Komponente h_1 von P_1 und die Komponente h_2 von P_2. Aus der Kongruenz der Dreiecke CDG und ABH folgt, daß die Strecke $DG = h_1$ ist, so daß die Resultierende $AD = h_1 + h_2$ ist. Wird nun im Punkt A nach rechts noch die Kraft $-R$ angebracht, so herrscht in demselben Gleichgewicht, da die Kräfte v_1 und v_2 sich aufheben, und die Gegenkraft $-R$ der Summe der beiden Horizontalkomponenten $h_1 + h_2$ das Gleichgewicht hält.

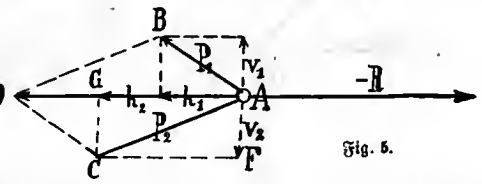


Fig. 5.

Zeichnerisch läßt sich die Gegenkraft sehr leicht bestimmen. Sind zwei Kräfte, P_1 und P_2, und der Winkel, unter welchem sie einander schneiden, bekannt, und stellen bestimmte Strecken bestimmte Kräfte dar, z. B. 1 mm = 1 kg, so wird folgendermaßen verfahren.

Es sei z. B. in Fig. 6 $P_1 = 40$ kg (also in vorstehendem Maßstab = 40 mm), $P_2 = 25$ kg (25 mm) und der eingeschlossene Winkel bei $A = 30°$, so erhält man die Mittelkraft oder Gegenkraft, indem man an die Kraft P_1 die Kraft P_2 unter dem Winkel von 30° bei B anbringt und den Endpunkt

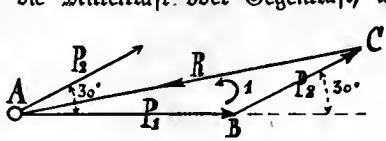


Fig. 6.

C mit A verbindet. Dann gibt Linie AC sowohl die Größe als auch die Richtung der Mittelkraft an. Umfährt man das Kräftedreieck ABC in der Richtung der Kräfte P_1 und P_2, also von A nach B und von B nach C, wie es der Pfeil 1 andeutet, so erhält man auch sofort in AC die Richtung, in welcher diese Kraft wirken muß, damit das System bei A im Gleichgewicht ist, nämlich von C nach A, oder von A aus schräg nach links unten.

Aus dem Vorstehenden folgt sofort ohne weiteres, daß drei Kräfte, welche an einem Punkt der Ebene angreifen, im Gleich-

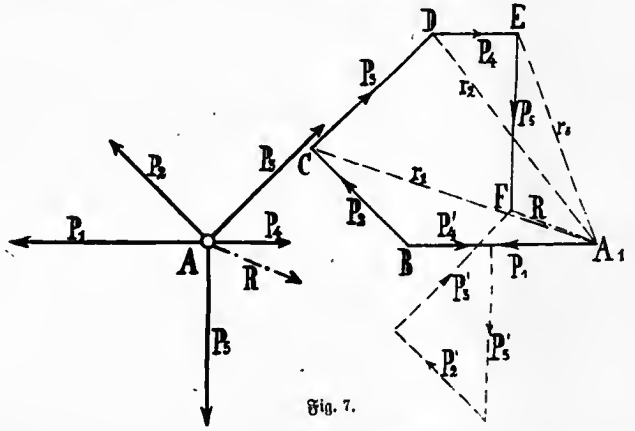


Fig. 7.

gewicht sind, wenn sie, in richtiger Reihenfolge und Richtung aneinandergefügt, ein geschlossenes Kräftedreieck bilden.

Was nun von drei Kräften gilt, läßt sich in gleicher Weise auch für beliebig viele Kräfte in der Ebene nachweisen. Denn es können alle Kräfte in horizontale und vertikale Komponenten zerlegt oder je zwei Kräfte zu einer Mittelkraft, diese wieder mit der nächstfolgenden zu einer zweiten Mittelkraft usw. vereinigt und schließlich zu der letzten Resultierenden die zugehörige gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Mittelkraft gefunden werden.

Es sollen beim Punkte A die fünf Kräfte P_1 bis P_5 in der in Fig. 7 dargestellten Weise angreifen, und zwar sei $P_1 = 35$ kg (35 mm), $P_2 = 25$ kg (25 mm), $P_3 = 30$ kg (30 mm), $P_4 = 15$ kg (15 mm) und $P_5 = 32$ kg (32 mm).

Sind die fünf Kräfte im Gleichgewicht, oder ist noch eine Gegenkraft anzubringen, und zwar von welcher Größe und in welcher Richtung?

Verfährt man wieder nach dem im Vorstehenden angewandten graphischen oder zeichnerischen Verfahren, so hat man zunächst die Kraft P_1 in Richtung und Länge von einem gewählten Punkte, z. B. A_1 aus gleich groß wie P_1 abzutragen, an diese Kraft am Ende die nächstfolgende Kraft P_2 in gleicher Richtung (also einfach parallel zu P_2) aufzutragen. Verbindet man den Endpunkt mit A, so ist die erhaltene Linie r_1 die Resultante von P_1 und P_2. Trägt man dann P_3 an und zieht r_2 nach A, so ist dies die Resultante von P_1, P_2 und P_3. In ähnlicher Weise ist r_3 die Resultante von P_1 bis P_4 und endlich R die Gegenkraft aller fünf Kräfte, welche noch in A anzubringen ist in der durch den Pfeil R angedeuteten Richtung, um alle fünf Kräfte P_1 bis P_5 im Gleichgewicht zu halten.

Der erhaltene Linienzug $A_1BCDEFA_1$ besteht aus den Außenseiten der Einzeldreiecke A_1BC, A_1CD usw. Der Linienzug $A_1BCDEFA_1$ bildet ein geschlossenes Polygon und gestattet sofort, folgenden Lehrsatz abzuleiten:

„Sind die an einem Punkt in der Ebene angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, so bilden dieselben, in richtiger Größe und Richtung aneinandergetragen, einen geschlossenen Linienzug."

Daß es hierbei auf die Reihenfolge, in welcher die Kräfte angetragen werden, nicht ankommt, beweist der untere Teil der Figur des Kräftepolygons, in welcher die Reihenfolge ganz beliebig gewählt ist (P_1, P_4, P_5, P_2 und P_3) und doch dieselbe Gegenkraft R in Größe und Richtung erhalten ist. In der Regel empfiehlt es sich indessen doch, um ein Polygon von übersichtlicher Form zu erhalten, die Kräfte in der Reihenfolge, wie sie auf den Punkt A wirken, aneinander zu tragen.

Eine Erweiterung erfahren die gefundenen Sätze, ohne jedoch an ihrer vollen Gültigkeit einzubüßen, durch folgende Betrachtung.

Bei dem oben (S. 3) angeführten Beispiel des Seiles, welches zwischen zwei Bäumen gespannt und mit einem Gewicht belastet war, blieb es sich völlig gleich, in welcher Länge die beiden Seilhälften befestigt waren, d. h. zwischen dem Angriffspunkt der Last und dem Baum war an jeder Stelle des Seilstückes die in demselben wirkende Kraft die gleiche. Denkt man sich statt des Seiles eine starre, feste, z. B. eiserne Stange, so gilt dasselbe auch hierfür. Es kommt also bei der Wirkung der Kraft nur auf Größe und Richtung, nicht aber auf den Angriffspunkt an, wenn nur das ganze System ein starres ist.

Für die vorliegende Untersuchung der Kräfte in der Ebene ist es daher nur erforderlich, dieselbe als vollkommen starr anzunehmen. Es bleibt sich dann gleich, ob die Kräfte, z. B. in

Fig. 7, P_1 bis P_5, alle am Punkt A direkt angreifen oder nicht, wenn nur ihre Richtungslinien alle durch den Punkt A hindurchgehen, sich also alle in einem Punkte schneiden. Die Angriffspunkte können dann beliebig weit außerhalb des Punktes A liegen, wenn sie nur starr mit ihm verbunden sind.

In Fig. 8 stellt EE diese starre Ebene dar, B, C, D, F, G sind die Angriffspunkte der Kräfte, welche dieselbe Größe und Richtung z. B. wie in Fig. 7 haben mögen.

Wie sofort klar ersichtlich, ist an der Wirkung der Kräfte in bezug auf den gemeinschaftlichen Angriffspunkt oder Kraft-Mittelpunkt A nichts geändert. Um Gleichgewicht zu erhalten, muß auch hier die Mittel- oder Gegenkraft R in der Richtung AH wie oben angebracht werden, und es ist völlig gleich, ob der Angriffspunkt von R in H oder in Punkt H_1 oder in irgendeinem andern Punkte auf der Linie AH oder endlich in Punkt A selbst liegt.

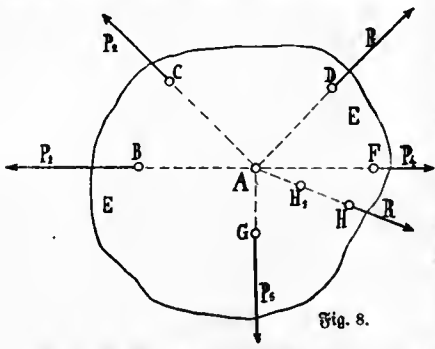


Fig. 8.

Es folgt hieraus der wichtige Lehrsatz, daß es für die Wirkung einer Kraft in einer starren Ebene gleichbleibt, in welchem Punkte ihrer an sich unveränderten Richtungslinie sie angreift.

Der allgemeinste Fall der Wirkung der Kräfte in einer Ebene ist der in Fig. 9 dargestellte, bei welchem dieselben keinen gemeinschaftlichen Angriffspunkt mehr haben.

Geht man jedoch wieder davon aus, daß zu je zwei Kräften eine Resultierende in bekannter Weise zu finden ist, so bietet auch die Lösung dieser Aufgabe keine Schwierigkeiten mehr.

Es seien A, B...F die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2...P_6 und M, N...S die Schnittpunkte je zweier benachbarter Kräfte-Richtungslinien.

Trägt man wieder, wie oben ausgeführt, die Kräfte P_1 und P_2 in gleicher Richtung aneinander und verbindet ihre Endpunkte, so ist r_1 die Resultierende oder Mittelkraft von P_1 und P_2, ebenso r_2 von P_3 und r_1, r_3 von P_4 und r_2, r_4 von P_5 und r_3. Zieht man schließlich noch P_6 und verbindet den Endpunkt mit dem Anfangs-

punkt von P_1, so schließt diese Linie R das Kräftepolygon und ist die Mittelkraft von P_6 und r_4, also auch von allen Kräften zusammen. Ihre Richtung und Größe ist aus dem Polygon gegeben und ist ihr Angriffspunkt der Schnittpunkt S von r_4 und P_6, da sie mit beiden Kräften im Kräftepolygon das letzte Dreieck bildet.

Bei den bisherigen Betrachtungen war angenommen worden, daß die starre Ebene durch die in ihr wirkenden Kräfte im Raume im Gleichgewicht, also frei schwebend gehalten werde.

Im folgenden soll nun angenommen werden, daß die Ebene zunächst in einem Punkte im Raume festgelagert, unterstützt sei und daß nun auf dieselbe mehrere Kräfte wirken. Die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für diesen Fall führt dann zu einer Reihe neuer Begriffe und Lehrsätze.

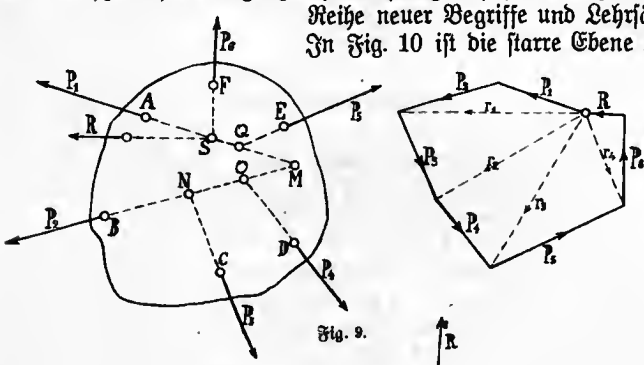


Fig. 9.

In Fig. 10 ist die starre Ebene EE dargestellt und sei sie im Punkte A unterstützt, während außerdem auf sie noch die Kräfte P_1 und P_2 wirken sollen.

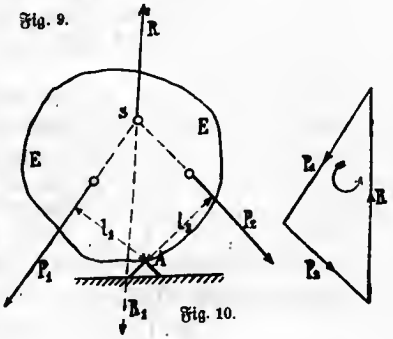


Fig. 10.

In bekannter Weise läßt sich die Mittelkraft R dieser beiden Kräfte aus dem Kräftedreieck ermitteln.

Wie jedoch aus der Figur ohne weiteres zu ersehen ist, würde die Ebene EE, da sie nur einseitig auf dem Stützpunkt A aufliegt, von demselben herunterrollen, wenn sie nicht gehalten würde. Diese rollende oder drehende Bewegung, welcher die Ebene ausgesetzt ist, hat ihren Grund in dem

exzentrischen Angreifen der Kräfte in bezug auf den Punkt A. Fällt man nun von dem letzteren auf die Kräfte P_1 und P_2 bzw. ihre Richtungslinien, die Lote l_1 und l_2, so erhält man in den Produkten $P_1 \cdot l_1$ und $P_2 \cdot l_2$ die sogenannten Drehmomente oder Kraftmomente, auch statischen Momente der Kräfte P_1 und P_2 in bezug auf den Punkt A. Die Längen l_1 und l_2 heißen die Hebelarme dieser Kräfte.

Wie aus der Figur ohne weiteres ersichtlich ist, wirken beide Kraftmomente in bezug auf den Punkt A, den Drehpunkt des Systems, nach verschiedenen Richtungen.

Verlängert man die Kraftrichtungen bis zu ihrem Schnittpunkt S, so muß in ihm die Resultierende oder Mittelkraft in der aus dem Kräftedreieck gegebenen Richtung angreifen. Würde die Richtung durch den Stützpunkt A hindurchgehen, so würde das System in Ruhe, im Gleichgewicht bleiben. In der Figur ist dies nicht der Fall, vielmehr hat die Richtungslinie der Resultanten vom Drehpunkt A einen gewissen, senkrechten, in der Figur nicht gezeichneten Abstand, der mit l bezeichnet werden möge. Die Resultierende R_1 (nach abwärts wirkend) bildet mit l das resultierende Moment $R_1 \cdot l$, welches das System in gleicher Weise wie die beiden Momente $P_1 \cdot l_1$ und $P_2 \cdot l_2$ beeinflussen würde. Soll jedoch Gleichgewicht herrschen, so muß dieses Moment in entgegengesetzter Richtung wirken, also nach oben. Es ist dann $R \cdot l$ das Gegenmoment, welches erforderlich ist, damit das System im Gleichgewicht bleibt.

Aus dem Kräftedreieck geht auch die Richtung von R ohne weiteres hervor.

Bezeichnet man noch für die Folge ein solches Drehmoment, welches in der Richtung der Uhrzeigerdrehung wirkt, als ein positives oder rechtsdrehendes, ein entgegengesetzt wirkendes als ein negatives oder linksdrehendes Moment, so herrscht Gleichgewicht, wenn die folgende Momentengleichung besteht. Zunächst ist $R_1 \cdot l = P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2$, worin $R_1 \cdot l$ das Ersatzmoment oder resultierende Moment für beide Einzelmomente ist. Nun soll aber das Gegenmoment zur Erhaltung des Gleichgewichtes wirken, also muß

$$R \cdot l = R_1 \cdot l \text{ oder}$$
$$R \cdot l = P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 \text{ sein.}$$

Die Gleichgewichtsgleichung schreibt sich auch unter Berücksichtigung der Drehrichtung der Momente, bezogen auf den Drehpunkt A:

$$+ R \cdot l + P_2 \cdot l_2 - P_1 \cdot l_1 = 0,$$

d. h. die an einem starren, ebenen System wirkenden statischen Momente halten sich das Gleichgewicht, wenn

1. die algebraische Summe der Einzelmomente gleich dem Moment der Resultierenden ist und
2. die algebraische Summe aller Momente gleich Null ist.

Aus der vorigen Gleichung folgt auch der Beweis, daß das System im Gleichgewicht ist, wenn die Mittelkraft durch den Stützpunkt geht, denn dann ist der Hebelarm der Resultierenden $l = 0$ und $P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2 = 0$, oder $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$, d. h. die statischen Momente halten sich das Gleichgewicht.

Zur Bestimmung des Hebelarmes l der Mittelkraft dient die einfache Gleichung

$$l = \frac{P_1 \cdot l_1 - P_2 \cdot l_2}{R}, \text{ oder allgemein}$$

$$l = \frac{P_1 \cdot l_1 \pm P_2 \cdot l_2 \pm P_3 \cdot l_3 \ldots}{R} = \frac{\text{Summe } (P \cdot l)}{R},$$

d. h. der Hebelarm ist gleich der algebraischen Summe aller statischen Momente, geteilt durch die Resultierende aller Kräfte.

Die wichtigsten Anwendungen vom vorstehend abgeleiteten Lehrsatz von den statischen Momenten sind: der Hebel und die Wage.

Der Hebel.

Man unterscheidet zwei Arten desselben, den einarmigen und den doppelarmigen Hebel. Der erstere ist in Fig. 11, der letztere in Fig. 12 in verschiedenen Ausführungen dargestellt. Fig. 11a zeigt den einarmigen Hebel schematisch.

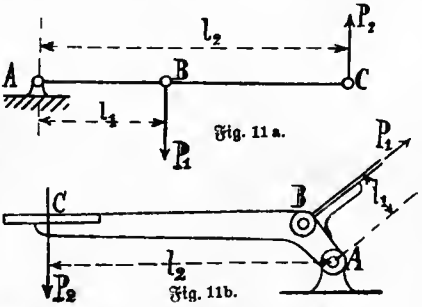


Fig. 11a.

Fig. 11b.

Bei A ist derselbe festgelagert, bei B im Abstand l_1 greift die Kraft P_1, bei C im Abstand l_2 die Kraft P_2 an. Für das Gleichgewicht muß die Gleichheit der beiden statischen Momente bestehen, also

$$P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2, \text{ oder } P_2 = P_1 \cdot \frac{l_1}{l_2}, \text{ oder } \frac{P_2}{P_1} = \frac{l_1}{l_2}$$

sein, d. h. die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die Hebelarme.

Fig. 11b zeigt einen einarmigen Hebel, wie er bei Fußbremsen vielfach Anwendung findet. Der winkelförmig gebogene

Hebel hat bei A seinen festen Drehpunkt. Bei B greift die Kraft P_1 an, welche als Zugkraft des Bremsbandes wirkt, dessen anderes Ende am Gestell der Maschine befestigt ist. Bei C ist eine Trittplatte angebracht, auf welche mit dem Fuß eine Kraft P_2 ausgeübt wird. Die Hebelarme beider Kräfte sind l_1 und l_2, und ist Gleichgewicht vorhanden, wenn wieder $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$ ist.

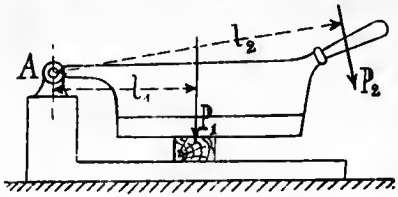


Fig. 11c.

Fig. 11c stellt eine praktische Anwendung des Hebels dar, ein Messer zum Zerschneiden von Brot, Zucker o. dgl., wie es im Haushaltsbetrieb oft Anwendung findet. P_2 ist die mit der Hand am Handgriff ausgeübte Kraft, P_1 der beim Zerschneiden ausgeübte Druck. Hieraus geht sofort hervor, daß der letztere um so größer ist, je näher das zu zerschneidende Stück an den Drehpunkt gebracht wird, da $P_1 = P_2 \cdot \frac{l_2}{l_1}$ ist und der Wert $\frac{l_2}{l_1}$ um so größer wird, je kleiner l_1 ist.

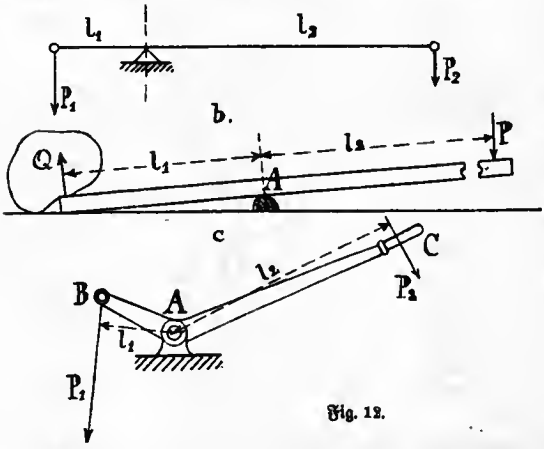


Fig. 12.

In Fig. 12a ist der doppelarmige Hebel schematisch dargestellt.

Auch für ihn gilt die statische Momentengleichung $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$.

In Fig. 12b ist der oft benutzte Hebebaum dargestellt. Das eine Ende desselben greift unter die zu hebende Last Q, während der Baum bei A, möglichst nahe dem Angriffspunkt der Last, aufliegt und am anderen, möglichst langen Ende die Kraft P, z. B. das Gewicht eines auf den Hebebaum sich auflegenden Arbeiters

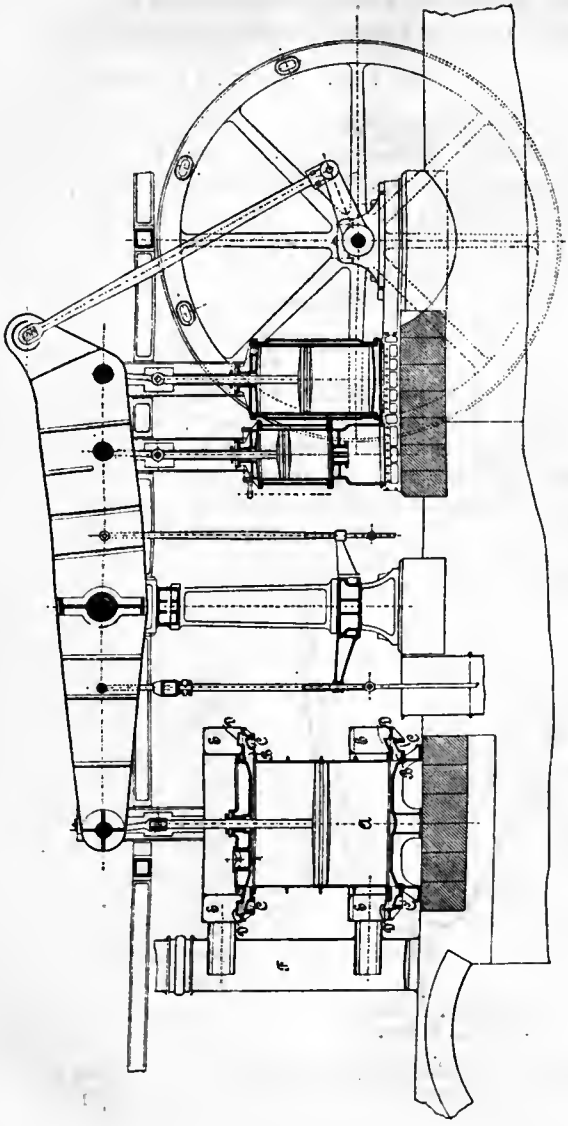


Fig. 13.

angreift. Ist letzteres z. B. 75 kg, ferner $l_1 = 0{,}3$ m $l_2 = 2{,}1$ m, so ist die Last Q, welche mit diesem Hebelangriff gehoben werden kann,

$$Q = 75 \cdot \frac{2{,}1}{0{,}3} = 75 \cdot 7 = 525 \text{ kg}.$$

Fig. 12c zeigt den Doppelhebel, wie er sehr häufig zum Anziehen von Handbremsen Anwendung findet. Bei B ist das eine, lose oder bewegliche Ende des Bremsbandes angebracht, bei C greift die Hand des Maschinisten an. l_1 und l_2 sind wieder die Lote vom Drehpunkte A auf die Kraftrichtungen von P_1 und P_2.

Ist P_2 z. B. $= 20$ kg, $l_2 = 1$ m, $l_1 = 0{,}2$ m, so ist die Zugkraft P_1, welche im Bremsband wirken kann,

$$P_1 = P_2 \cdot \frac{l_2}{l_1} = 20 \cdot \frac{1}{0{,}2} = 20 \cdot 5 = 100 \text{ kg}.$$

Ein sehr interessantes Beispiel eines doppelarmigen Hebels ist endlich in Fig. 13 abgebildet, es ist dies der Balancier einer stehenden Hochofen-Gebläsemaschine. Derselbe ist in der Mitte auf einem kräftigen, säulenartigen Gestell drehbar gelagert. Am linken Ende greift die Kolbenstange des Gebläsezylinders, am rechten Hebelarme greifen die beiden Kolbenstangen des kleineren (Hochdruck-) und größeren (Niederdruck-) Dampfzylinders und am schrägen Ende, dem sogenannten Horn, die zur Kurbel des Schwungrades führende Pleuelstange an. Außerdem greifen nahe am Stützpunkt noch zwei Stangen zum Antrieb der Pumpen und endlich in der Nähe der Dampfzylinder noch je eine, in der Figur nicht gezeichnete, Stange zur Steuerung der Ein- und Auslaßorgane der Dampfzylinder an. Im ganzen sind somit 8 Angriffspunkte von Kräften vorhanden, linksseitig 2, rechtsseitig 6. Die von den Dampfkolbenstangen ausgeübten Drücke und Züge (erstere beim Aufgang, letztere beim Niedergang der Dampfkolben) müssen alle an dem Balancier angreifenden Kräfte überwinden.

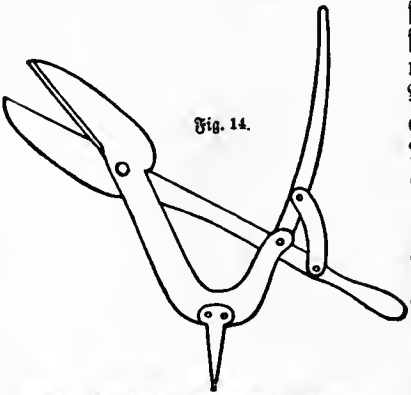


Fig. 14.

Aus: Katechismus der mechan. Technologie. Leipzig, J. J. Weber 1904.

Hieraus sind leicht die auf den Stützpunkt bezogenen statischen Momente der Kräfte in den einzelnen Angriffspunkten zu berechnen.

Ein anderes, ebenfalls häufig angewandtes Beispiel des doppelarmigen Hebels ist die in Fig. 14 abgebildete Stockschere. Der Drehpunkt der beiden Scherenblätter oder Backen ist zugleich der Punkt A des Doppelhebels der Figur 12c. Der lange Hebel der unteren Backe hat — für kleinere Schnittleistungen — am hinteren Ende einen Handgriff. Soll jedoch — zum Durchschneiden dickerer Bleche — die Kraft verstärkt werden, so wird am Ende des lotrechten Hebels angefaßt. Derselbe ist durch eine bogenförmige Lasche mit dem hinteren Ende des unteren Hebels verbunden, wodurch das Hebelverhältnis noch um die Länge des lotrechten Hebels vergrößert wird.

Es dürfte nach dem Vorhergehenden bei gegebenen Längenverhältnissen nicht schwer fallen, die Kraft zu berechnen, welche im ersteren und letzteren Falle auf die Scherenblätter ausgeübt wird.

Wie man sieht, hat der Hebel zahllose Anwendungen im Gebiete des gewerblichen Lebens, der hauswirtschaftlichen Geräte und im ganzen Maschinenbau gefunden. Er ist eines der wichtigsten und unentbehrlichsten Hilfsmittel zur Kraft- und Bewegungsübertragung.

Die Wage.

Die einfachste derselben ist die gleicharmige, einfache Balkenwage, Fig. 15. Ein doppelarmiger Hebel trägt an beiden Enden die Wagschalen. Er ist mittels zweier Schneiden auf zwei, in der Aufhängevorrichtung der Wage angebrachten Pfannen leicht beweglich gelagert. Das Gleichgewicht der Momente ist vorhanden, wenn $P \cdot l = Q \cdot l$, oder da beide Hebel gleich sind, wenn $P = Q$ ist.

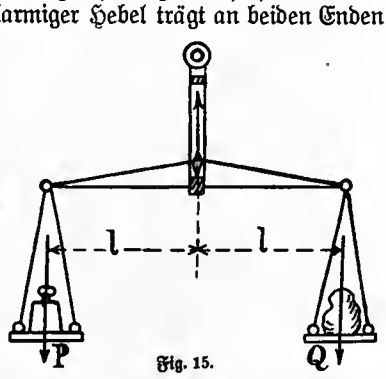


Fig. 15.

Nach diesem Prinzip sind auch die empfindlichsten aller Wagen, die chemischen Wagen gebaut, nur liegt bei denselben der Zeiger und die Nullpunktsskala nicht oberhalb, sondern unterhalb des Wagebalkens. Dieselben sind fast immer mit Vorrichtungen zum Abheben

des Wagebalkens von den Schneiden während des Nichtgebrauchs versehen und vollständig in einem Glasgehäuse eingeschlossen.

Eine ungleicharmige Wage ist die sogenannte römische Wage oder Laufgewichtswage, Fig. 16. Der Doppelhebel trägt am kürzeren Ende die Wagschale mit der Last Q, am längeren Hebel ein verschiebbares und in die Kerben des Hebelarmes einzuhängendes Laufgewicht L. Im Gleichheitszustand spielt der Zeiger Z der Wage an einer Marke der Aufhängung lotrecht ein und besteht dann die Momentengleichung:

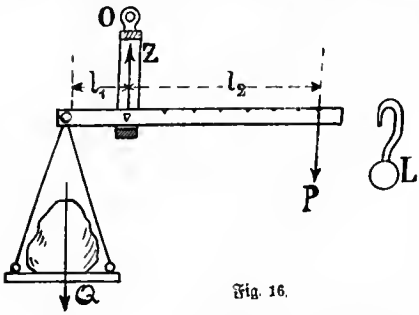


Fig. 16.

$$Q \cdot l_1 = P \cdot l_2.$$

Der längere Hebel ist jedoch schon so tariert, daß beim Einhängen des Laufgewichts L in jede Kerbe das an derselben angegebene Gewicht auf der Wagschale gewogen wird, also eine Berechnung nicht mehr erforderlich ist, das Eigengewicht der Wagschale und der Hebelarme somit schon ausgeglichen ist. Gewöhnlich ist die Gleichgewichtslage der unbelasteten Wage diejenige, bei welcher das Laufgewicht in die innerste Kerbe eingehängt ist. An einer Öse O, in welche ein Haken eingreift, ist die Wage aufgehangen oder wird beim Abwiegen freischwebend gehalten.

Um mit kleinen Gewichten größere Lasten abwägen zu können, hat man

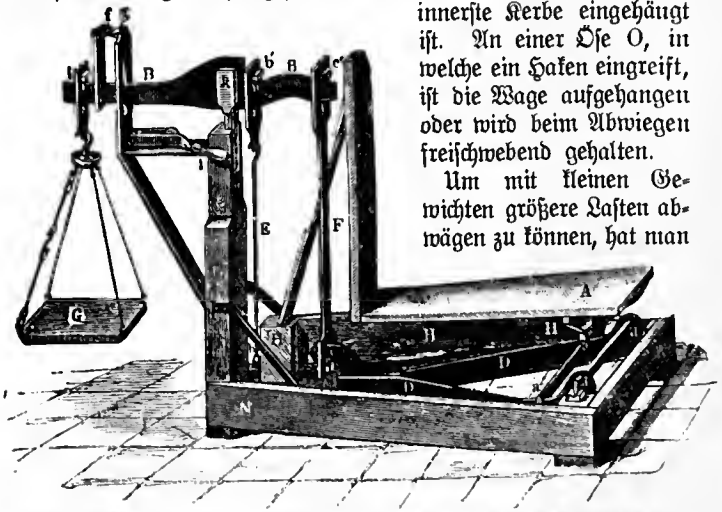


Fig. 17. Aus: Lexikon der gesamten Technik. Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt.

zusammengesetzte Wagen konstruiert, welche unter dem Namen Dezimal- und Zentesimal- oder Brückenwagen bekannt sind.

Die Dezimalwage ist in Fig. 17 in ihrer äußeren Ansicht und in Fig. 18 schematisch dargestellt.[1])

Das Wesentliche dieser Wage ist das, daß erstlich die Schale, welche die abzuwiegende Last trägt, sich innerhalb kleiner Grenzen parallel auf und nieder bewegt, daß ferner die Lastschale in zwei oder mehreren Achsen gestützt wird, welche nicht in ein und derselben Graden liegen und daß endlich das Gewichtsverhältnis zwischen dem Wägegewicht und der Last 1 : 10 beträgt. Auch ist es bei dieser Wage gleichgültig, auf welchem Punkte der Wageschale die Last liegt.

Am oberen, wagerechten Hebel, dem Wagebalken BB, Fig. 17, greifen drei Kräfte an, auf der linken Seite die Gewichtsschale G, auf der rechten die beiden Zugstangen E und F, deren jede auf einen unter der Brücke liegenden einarmigen Hebel wirkt.

In Fig. 18 ist der Mechanismus schematisch dargestellt und gestattet derselbe die Berechnung der statischen Momente.

Bei A ist die Gewichtsschale aufgehängt, auf welcher das Gewicht G liegt. Bei B ist der Hebel (Wagebalken) AD gestützt. Direkt dahinter greift bei C die eine Zugstange mit der Kraft P_1, bei D die andere Zugstange mit der Kraft P_2 an. Die auf der Brücke liegende und zu wiegende Last vom Gewicht Q zerfällt in zwei Kräfte P_1 und P_3.

Für den Punkt B gilt zunächst die statische Momentengleichung:

$$G \cdot l = P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2.$$

Für den Punkt J dagegen gilt die Gleichung

$$P_2 \cdot l_4 = P_3 \cdot l_3.$$

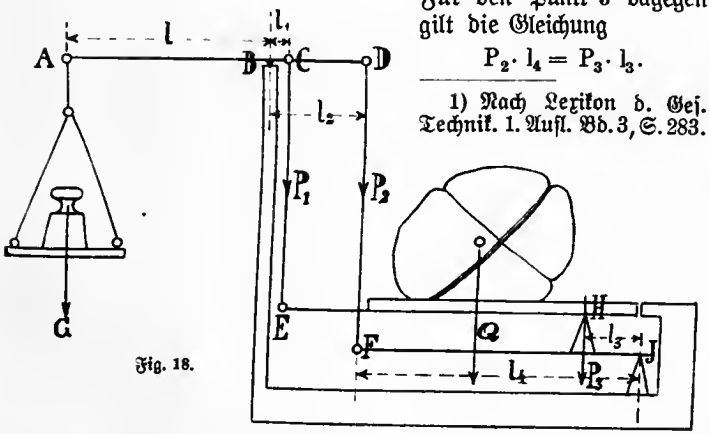


Fig. 18.

1) Nach Lexikon d. Ges. Technik. 1. Aufl. Bd. 3, S. 283.

Ferner ist, ganz unabhängig von der Lage der Last auf der Brücke,

$$P_1 + P_3 = Q.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt zunächst

$$P_2 = P_3 \cdot \frac{l_3}{l_4}.$$

Nun sind die Hebelverhältnisse folgende:

Es ist $l_1 = \frac{1}{10} l$, $l_2 = \frac{1}{2} l$, $l_3 = \frac{1}{5} l_4$; mithin ist $P_2 = \frac{P_3}{5}$, mithin

$$G \cdot l = P_1 l_1 + P_3 \cdot l_2 \cdot \frac{1}{5} = P_1 \cdot \frac{l}{10} + P_3 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{5} = (P_1 + P_3) \cdot \frac{l}{10}$$

oder

$$G = \frac{1}{10}(P_1 + P_3) = \frac{1}{10} Q.$$

Daß auch die Brücke bei ihrer Hebung und Senkung stets in horizontaler Stellung bleibt, geht aus dem Hebelverhältnisse ebenfalls hervor.

Hebt sich z. B. der Punkt A um 20 mm, so geht der Punkt C um 2 mm nach unten, der Punkt D aber, da $l_2 = \frac{l}{2}$ ist, um 10 mm.

In gleichem Maße bewegt sich F um 10 mm nach unten und, da $\frac{l_3}{l_4} = \frac{1}{5}$ ist, der Punkt H um $\frac{10}{5} = 2$ mm. Es werden sich also beide Enden der Brücke, sowohl E als auch H, um 2 mm nach unten bewegen, so daß also die Brücke horizontal bleiben wird. Dasselbe gilt für den Fall, daß der Punkt A sich z. B. um 20 mm senkt, dann hebt sich die Brücke genau wagrecht um 2 mm. Im übrigen kommen Ausschläge des Punktes A von 20 mm nach oben und unten nur selten vor, da für gewöhnlich feste Anschläge am Gestell vorhanden sind, welche nur ein geringes Spiel des Wagebalkens gestatten.

Bei der Zentesimal- oder Brückenwage sind die Hebelverhältnisse so gewählt, daß mit einem bestimmten Gewichte die 100fache Last gewogen werden kann.

In Fig. 19 ist oben eine schematische Darstellung einer solchen Wage, darunter eine Ansicht der mittleren Hebel gegeben.

Die Brücke CC, auf welcher die Last Q ruht, stützt sich mit vier Streben S_1 bis S_4 auf die gegabelten Hebel H_1 und H_2, welche an einem Ende auf den Schneiden A aufliegen, während sie am anderen, nach der Mitte der Wage zu gelegenen Ende mittels der Zugstangen Z_1 und Z_2 an dem Querhebel H_3 angreifen. Dieser

ist einerseits auf der Schneide B gelagert, während am anderen Ende die Zugstange Z_3 angreift, deren oberes Ende am Wagebalken W befestigt ist.

Die Last verteilt sich von der Brücke durch die vier Streben gleichmäßig auf die Hebel H_1 und H_2, so daß jeder Hebel mit $\frac{Q}{2}$ belastet ist.

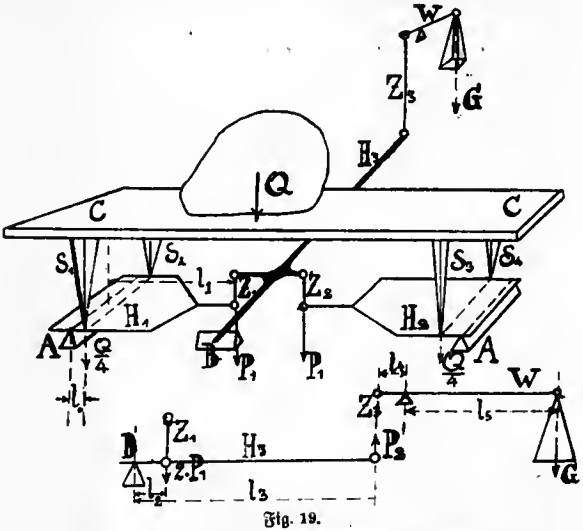


Fig. 19.

Es bestehen nun folgende statische Momentengleichungen:

1. oberer Wagebalken W:

$$G \cdot l_5 = P_2 \cdot l_4,$$

2. mittlerer Wagebalken H_3:

$$P_2 \cdot l_3 = 2 \cdot P_1 \cdot l_2,$$

3. Hebel H_1 oder H_2:

$$P_1 \cdot l_1 = \frac{Q}{2} \cdot l_0.$$

Hieraus folgt:

$$P_1 = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l_0}{l_1}.$$

$$P_2 = 2 \cdot P_1 \cdot \frac{l_2}{l_3} = 2 \cdot \frac{Q}{2} \cdot \frac{l_0}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_3} = Q \cdot \frac{l_0}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_3}.$$

$$G = P_2 \cdot \frac{l_4}{l_5} = Q \cdot \left(\frac{l_0}{l_1}\right) \cdot \left(\frac{l_2}{l_3}\right) \cdot \left(\frac{l_4}{l_5}\right).$$

Wird nun z. B. $\frac{l_0}{l_1} = \frac{1}{5}$, $\frac{l_2}{l_3} = \frac{1}{5}$, $\frac{l_4}{l_5} = \frac{1}{4}$ gewählt, so ist

$$G = Q \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{Q}{100}.$$

Für sehr schwere Lasten, z. B. zum Wiegen von beladenen Eisenbahnwagen oder Lokomotiven können die Verhältnisse leicht so gewählt werden, daß ohne zu schwere Gewichte gewogen werden kann, z. B. $\frac{l_0}{l_1} = \frac{1}{10}$, $\frac{l_2}{l_3} = \frac{1}{10}$, $\frac{l_4}{l_5} = \frac{1}{5}$, so daß $G = \frac{1}{500} Q$ wird.

Parallele Kräfte in der Ebene.

Ein Spezialfall, welcher bei der Wirkung der Kräfte in der Ebene am häufigsten vorkommt, ist jener, bei welchem alle Kräfte parallel gerichtet sind.

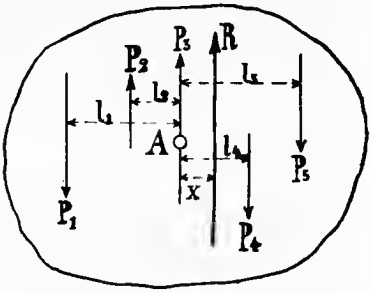


Fig. 20.

Man kann hierbei nun wieder noch zwei besondere Fälle unterscheiden, indem der Drehpunkt A der Ebene, auf welchen sich alle statischen Momente beziehen, in der Richtung einer Kraft liegt oder außerhalb derselben.

Der erste Fall ist in Fig. 20 dargestellt.

Um das System in Gleichgewicht zu erhalten, muß außer den Kräften P_1 bis P_5 noch eine Resultierende im Abstand x angreifen.

Man erhält dann folgende Momentengleichung:

$$-P_1 \cdot l_1 + P_2 l_2 + P_4 \cdot l_4 + P_5 l_5 - R \cdot x = 0 \text{ und}$$
$$P_1 + P_4 + P_5 - P_2 - P_3 - R = 0.$$

Hieraus folgt zunächst $R = P_1 + P_4 + P_5 - P_2 - P_3$ und $x = \frac{P_2 \cdot l_2 - P_1 l_1 + P_4 l_4 + P_5 l_5}{R}$ oder allgemein $x = \frac{\text{Summe } (P \cdot l)}{\text{Summe } (P)}$, worin unter den Summen die algebraischen Summen unter Berücksichtigung der Vorzeichen zu verstehen sind.

Beispiel. Es seien

$P_1 = 20$ kg,	$l_1 = 1$ m,
$P_2 = 10$ kg,	$l_2 = 0{,}5$ m,
$P_3 = 30$ kg,	
$P_4 = 35$ kg,	$l_4 = 0{,}6$ m,
$P_5 = 25$ kg,	$l_5 = 1{,}2$ m.

Dann ist
$$P_2 \cdot l_2 = 10 \cdot 0{,}5 = \quad 5 \text{ mkg},$$
$$P_4 \cdot l_4 = 35 \cdot 0{,}6 = \quad 21 \text{ mkg},$$
$$P_5 \cdot l_5 = 25 \cdot 1{,}2 = \quad 30 \text{ mkg},$$
$$\underline{\qquad\qquad 56 \text{ mkg}},$$
$$P_1 \cdot l_1 = 20 \cdot 1 \quad = -20 \text{ mkg},$$
also die algeb. Summe = $\quad 36$ mkg.

Ferner ist
$$P_1 + P_4 + P_5 = 20 + 35 + 25 = 80 \text{ kg},$$
$$P_2 + P_3 = 10 + 30 \qquad\quad = 40 \text{ kg},$$
also $R = 80 - 40 = \mathbf{40\ kg}$ und
$$x = \frac{\text{Summe } (P \cdot l)}{\text{Summe } (P)} = \frac{36}{40} = \mathbf{0{,}9\ m}.$$

Der zweite Fall ist in Fig. 21 dargestellt, bei welchem der Drehpunkt A außerhalb der Kraftrichtung irgendeiner Kraft liegt.

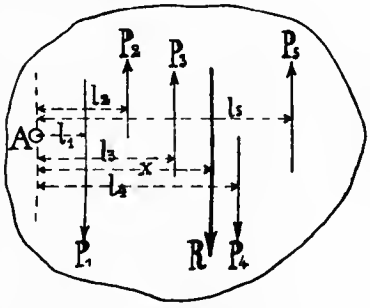


Fig. 21.

Dann gelten wieder, bezogen auf den Momentendrehpunkt A, die Gleichungen:
$$+ P_1 \cdot l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3$$
$$+ R \cdot x + P_4 l_4 - P_5 l_5 = 0$$
und
$$P_1 - P_2 - P_3 + R + P_4 - P_5 = 0.$$

Hieraus folgt genau wie im ersten Falle:
$$R = P_2 + P_3 - P_1 - P_4 + P_5 \text{ und}$$
$$x = \frac{P_2 l_2 - P_1 l_1 + P_3 l_3 - P_4 l_4 + P_5 l_5}{R} = \frac{\Sigma(P \cdot l)}{\Sigma(P)}.^{1})$$

Genau wie im vorigen Fall läßt sich hieraus für ein gegebenes Beispiel die Mittelkraft R und der Hebelarm derselben berechnen.

Weit einfacher gestaltet sich die Ermittelung der beiden letztgenannten Größen auf zeichnerischem oder graphischem Wege, worauf jedoch erst weiter unten im dritten Kapitel näher eingegangen werden soll.

1) $\Sigma(Pl)$ bezeichnet die algebraische Summe aller statischen Momente und $\Sigma(P)$ die algebraische Summe aller Kräfte.

2. Kapitel.

Die Kräftepaare.

Wirken in einer Ebene zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte in einem bestimmten Abstand voneinander, so suchen dieselben die Ebene in einem, aus der Richtung der Kräfte sich ergebenden Sinne zu drehen. Man bezeichnet dieses Kraftsystem als ein Kräftepaar, und das Produkt aus der Kraft P und dem Abstand der beiden Kräfte (Hebelarm) als das Moment, auch Drehmoment des Kräftepaares.

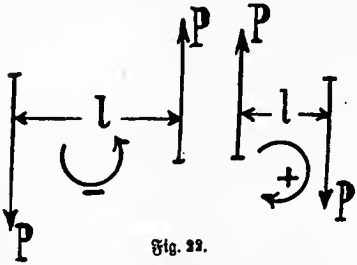


Fig. 22.

In Fig. 22 ist links ein — im Sinne des Uhrzeigers gerechnet — linksdrehendes oder negatives, rechts ein rechtsdrehendes oder positives Kräftepaar dargestellt. Das Drehmoment beider ist $P \cdot l$.

Für die Kräftepaare gelten im wesentlichen folgende Lehrsätze, auf deren Beweise hier nicht näher eingegangen werden kann.

1. In einer starren Ebene kann ein Kräftepaar beliebig verschoben und in jede, zur ersteren Ebene parallele Ebene eines starren Körpers verlegt werden, ohne daß an der Wirkung des Kräftepaares etwas geändert wird.

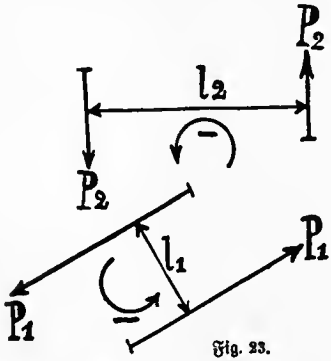


Fig. 23.

2. Ein Kräftepaar kann durch ein zweites ersetzt werden, dessen Moment und Drehsinn dieselben sind; die Kräfte und Hebelarme können hierbei beliebig verschieden sein.

An Stelle des linksdrehenden Kräftepaares $P_1 P_1$ in Fig. 23 vom Moment $P_1 l_1$ kann in derselben Ebene, also an beliebiger Stelle das Kräftepaar $P_2 P_2$ vom Moment $P_2 l_2$ gesetzt werden, welches ebenfalls linksdrehend ist, wenn nur $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$ ist.

Beispiel. Es sei $P_1 = 100$ kg, $l_1 = 2$ m, also das Moment $P_1 l_1 = 200$ mkg, so kann dasselbe durch das Kräftepaar $P_2 P_2$ von 50 kg mit einem Hebelarme $l_2 = 4$ m oder ein solches von 40 kg mit dem Hebelarm 5 m usw. ersetzt werden, wenn stets $P_2 \cdot l_2$ auch $= 200$ kg ist.

3. Zwei Kräftepaare von gleichem Moment, aber entgegengesetztem Drehsinn in derselben Ebene oder in parallelen Kräften eines starren Körpers heben einander auf oder halten sich das Gleichgewicht. In Fig. 24 ist ein Beispiel dieser Art schematisch dargestellt.

Eine Welle ist an beiden Enden mittels zweier sogenannter Zapfen drehbar gelagert. Auf ihr sind zwei Seil- oder Riemenscheiben S_1 und S_2 vom Durchmesser D_1 und D_2 befestigt. Am Umfang der ersteren wirkt die Zugkraft P_1, am Umfang der zweiten Scheibe die Zugkraft P_2, aber in entgegengesetztem Drehsinne als P_1. Sind nun die Durchmesser der Scheiben so gewählt, daß das Drehmoment $P_1 \cdot \frac{D_1}{2} = P_2 \cdot \frac{D_2}{2}$ ist, so herrscht am System Gleichgewicht, da beide Momente entgegengesetzten Drehsinn haben und einander in der Wirkung aufheben. Dieser Fall tritt ein bei allen Triebwerken mit Seilen, Ketten oder Zahngetrieben sowohl im Ruhezustand als auch im Bewegungszustand, da stets das eine Kräftepaar dem anderen das Gleichgewicht hält, d. h. das treibende dem widerstehenden oder Widerstand leistenden mindestens gleich sein muß.[1])

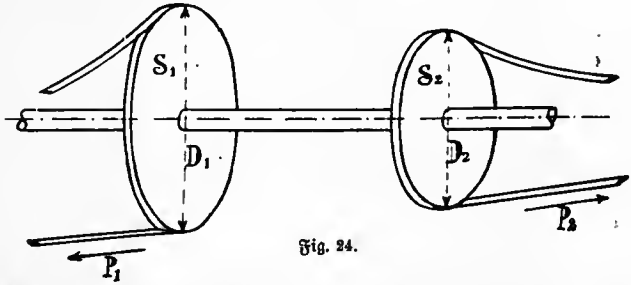


Fig. 24.

4. Kräftepaare in parallelen Ebenen lassen sich durch ein einziges, resultierendes Kräftepaar ersetzen, wenn das Moment des letzteren der algebraischen Summe der Momente sämtlicher

1) In der Praxis muß das erstere allerdings zur Überwindung der Reibungs- und Seilwiderstände etwas größer als das letztere sein.

Kräftepaare gleich und seine Ebene parallel zu den Ebenen der ersetzten Kräftepaare ist.

5. Eine Kraft in der Ebene läßt sich ersetzen durch eine ihr gleich große und gleich gerichtete und ein Kräftepaar in derselben Ebene, ohne daß an dem Gleichgewichtszustand etwas geändert wird.

Man kann diesen Satz auch so ausdrücken:

Eine Kraft läßt sich von ihrem Angriffspunkt parallel zu sich nach einem beliebigen Punkt derselben Ebene verschieben, indem man in dem neuen Angriffspunkt zwei mit ihr gleiche, zu ihr parallele, aber zueinander entgegengesetzt gerichtete Kräfte anbringt.

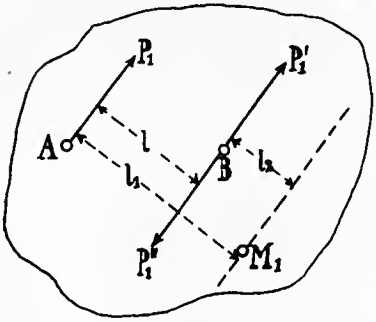


Fig. 25.

In Fig. 25 ist P_1 die ursprüngliche Kraft, welche im Punkte A angreift. In einem beliebigen anderen Punkt der Ebene, z. B. B, kann die Kraft P_1' nach derselben Richtung wie in A angreifen, ohne eine Änderung im System hervorzubringen, wenn P_1 auch in der entgegengesetzten Richtung wirkt.

Denkt man sich z. B. die Ebene in M_1 festgehalten, so hat man für den ersten Fall das statische Moment, bezogen auf M_1: $P_1 \cdot l_1$. Nach erfolgter Verlegung nach B wirken die Momente:

$$P_1 l_1,\ P_1' l_2 \text{ und } P_1'' l_2.$$

Man hat dann die algebraische Summe

$$P_1 l_1 + P_1' l_2 - P_1'' l_2,$$

worin jedoch $P_1' l_2 = P_1'' l_2$, so daß $P_1 l_1$ unverändert bleibt.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn der Punkt M_1 z. B. zwischen P_1 und P_1' liegen sollte.

3. Kapitel.

Das Gleichgewicht der biegsamen Körper.

Als Repräsentant der biegsamen Körper sei ein absolut biegsames, gewichtloses Seil von beliebiger Länge vorausgesetzt. Dasselbe sei an zwei Punkten A und B, Fig. 26, befestigt, aufgehangen,

welche Punkte daher die Aufhängungspunkte heißen. An einem beliebigen Punkte M, z. B. an einem dort befindlichen Knoten, sei ein Haken befestigt, an welchem eine Belastung mit der Kraft P senkrecht nach unten wirke. Man nennt den Punkt M daher auch einen Knotenpunkt.

Auf den Punkt M lassen sich nun die im ersten Kapitel abgeleiteten Sätze ohne weiteres anwenden. In ihm wirken die drei Kräfte: P senkrecht nach unten und nach links und rechts je eine Spannkraft im Seil, S_1 und S_2, welche die Seilspannungen heißen. Diese letzteren beiden Kräfte wirken auch in den Punkten A und B.

Zerlegt man dieselben dort nach dem Parallelogramm der Kräfte in je eine horizontale und vertikale Kraft, so kann man S_1 durch H_1 und V_1 und S_2 durch H_2 und V_2 ersetzen. Da das ganze System in Gleichgewicht ist, so müssen die drei Kräfte P, S_1 und S_2 auch ein geschlossenes Kräftedreieck bilden. Dasselbe ist rechts gezeichnet,

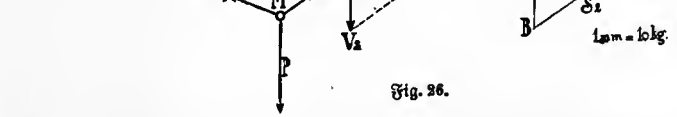


Fig. 26.

indem P_1 senkrecht nach unten in einem bestimmten Maßstab aufgetragen wurde (z. B. 1 mm = 10 kg), und dann durch beide Endpunkte A und B der Kraft Parallelen zu S_1 und S_2 gezogen wurden. Dieselben schneiden sich in einem Punkte O, der der Pol des Kräfteplanes heißt. Die Strecken OA und OB sind die Polstrahlen und sie geben direkt die absoluten Größen der Kräfte S_1 und S_2 an. Im vorliegenden Falle war P = 26 mm also, da 1 mm = 10 kg ist, = 260 kg. S_1 und S_2 ergeben sich dann zu 25,5 · 10 = 255 kg und 29 · 10 = 290 kg.

Zieht man nun vom Pol O die horizontale Linie C senkrecht zu AB, so erhält man der Größe und Richtung nach die Kräfte AC, CB und CO. Es ist, da die Dreiecke ACO geschlossen sind, zwischen AC, CO und S_1 Gleichgewicht, also sind die Kräfte AC und CO die Komponenten von S_1 oder die Kraft AC ist = V_1 und CO = H_1. Ebenso ist im Dreieck CBO CB = V_2 und CO = H_2. Man erhält somit durch Ziehen der Horizontalen OC sowohl die beiden

Vertikalkomponenten von P, welche in den Punkten A und B nach oben wirken, als auch die Horizontalkomponenten. Diese letzteren sind, wie sofort aus dem Kräftedreieck hervorgeht, einander gleich und entgegengesetzt gerichtet, heben einander also auf. Denn umfährt man das obere Dreieck A C O im Sinne von S_1, so müßte, damit Gleichgewicht herrscht, H_1 von links nach rechts wirken, die Komponente von S_1 wirkt also, wie durch Pfeil H_1 angedeutet ist, von rechts nach links, wie es auch im Seilplan gezeichnet ist. Dasselbe gilt für das untere Kräftedreieck C B O, wenn dasselbe in der Richtung von S_2 umfahren wird. Die Horizontalkomponente von S_2 wirkt also von links nach rechts im Sinne des eingezeichneten kleinen Pfeiles H_2. H_2 ist also gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet wie H_1, was auch aus Fig. 26 hervorgeht.

Man erhält somit die wichtige Beziehung zwischen dem Kraftsystem am Seil und dem Kräftedreieck, welche sich folgendermaßen ausdrücken läßt.

Sind an einem Knotenpunkt die Seilspannungen mit der Belastung im Gleichgewicht, so bilden sie ein Kräftedreieck, dessen Horizontale oder Höhe die beiden entgegengesetzt gerichteten, gleich großen Horizontalspannungen des Seiles darstellt und die Basis oder Kraft in zwei Kräfte, die beiden Vertikalspannungen oder lotrechten Belastungen in den Aufhängepunkten zerlegt.

Diese Beziehung gibt in ihrer Umkehrung ein außerordentlich einfaches Mittel zur Bestimmung der Mittelkraft von parallelen Kräften nach Größe und Richtung in der Ebene an. Nimmt man nämlich an, daß die beiden Kräfte V_1 und V_2 in den Punkten A und B lotrecht nach unten wirkten, und es soll die Richtung und Größe der Mittelkraft bestimmt werden, so ist die Konstruktion die folgende:

Man trägt die Kräfte V_1 und V_2 aneinander an, so ist ihre Summe zunächst gleich der Mittelkraft P. Nun wählt man außerhalb einen beliebigen Pol, z. B. den Punkt O, und zieht die Polstrahlen A O, B O und C O, zieht durch die Angriffspunkte A und B der Kräfte V_1 und V_2 in der linken Figur Parallelen zu S_1 und S_2, so ist der Schnittpunkt M dieser Strahlen der Angriffspunkt der Mittelkraft P.

Es wird sich weiter unten zeigen, welche Bedeutung dieser Beziehung für die ganze Statik, besonders die Lehre vom Schwerpunkt, die Lehre von den starren Systemen, den Fachwerken usw. zukommt.

Was nun für eine Kraft oder einen Punkt M gilt, läßt sich auch auf zwei und mehrere Kräfte oder Knotenpunkte anwenden, wie leicht nachzuweisen ist.

In Fig. 27 ist ein mehrfach belastetes Seil mit den beiden Aufhängepunkten A und E und den Knotenpunkten B, C und D, in welchen die Kräfte P_1, P_2 und P_3 senkrecht nach unten, also parallel wirken, dargestellt. Trägt man wieder die drei Kräfte in bestimmtem Maßstabe (z. B. wieder 1 mm = 10 kg) senkrecht untereinander auf, so ist die Resultierende aller Kräfte $R = P_1 + P_2 + P_3$, da alle Kräfte lotrecht nach unten wirken. Zieht man nun zu den Seilrichtungen AB, BC, CD und DE von den Endpunkten der Kräfte aus Parallelen, so schneiden sich diese Strahlen im Punkte O.

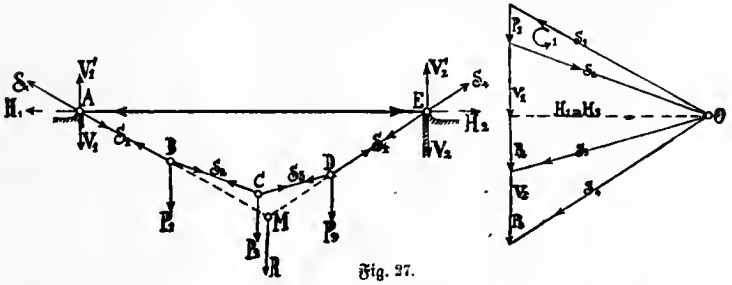


Fig. 27.

Die Strecken S_1, S_2, S_3 und S_4 im Kräftedreieck haben nun im gewählten Kräftemaßstabe die Größen der Seilspannungen in den einzelnen Strecken des Seiles, welche zusammen das sogenannte Seilpolygon ABCDE bilden.

Es war
$$P_1 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ kg},$$
$$P_2 = 35 \cdot 10 = 350 \text{ kg},$$
$$P_3 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ kg}.$$

Demnach ist $R = \Sigma(P) = 650$ kg.

Die einzelnen Seilspannungen ergeben sich aus dem Kräfteplan zu

$$S_1 = 61 \cdot 10 = 610 \text{ kg},$$
$$S_2 = 57 \cdot 10 = 570 \text{ kg},$$
$$S_3 = 54{,}5 \cdot 10 = 545 \text{ kg},$$
$$S_4 = 63{,}5 \cdot 10 = 635 \text{ kg},$$

und $H_1 = H_2 = 53 \cdot 10 = 530$ kg,

ferner $V_1 = 30 \cdot 10 = 300$ kg,

und $V_2 = 35 \cdot 10 = 350$ kg.

Verbindet man nun noch die beiden Aufhängepunkte A und E miteinander durch die Linie AE, welche z. B. als starre Linie (Stange, Balken) gedacht sein soll, so nennt man diese Linie die Schlußlinie des Seilpolygons. Die zu ihr parallele Linie im Kräftedreieck vom Pol O aus gibt die Horizontalspannungen H_1 und H_2, also jene Kräfte, welche in der Linie AE wirken. Am Aufhängepunkt A wirkt H_1 nach links, in E H_2 nach rechts. Zeichnet man diese Pfeilrichtungen in die Stange AE ein, so zeigt dieselbe zwei entgegengesetzte, auseinander gerichtete Pfeile. In den Seilen S_1 bis S_4 dagegen sind die Pfeilspitzen einander zugekehrt.

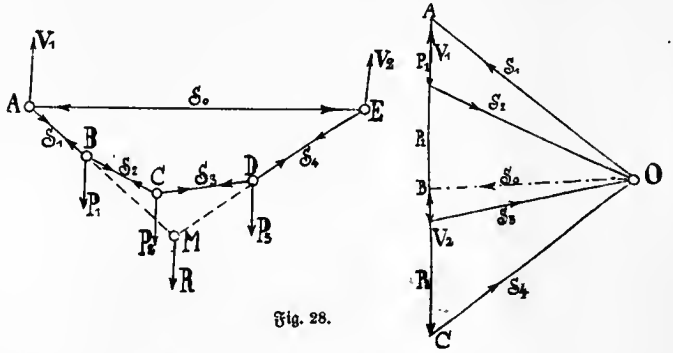


Fig. 28.

Da aber in den einzelnen Seilstrecken nur Zugkräfte wirken können, weil ja Seile nur diesen Kräften widerstehen, sie aber eine Druckbeanspruchung nicht erleiden können, so geht hieraus folgende wichtige Regel für den Zusammenhang der Seilpolygone und Kräftepläne hervor:

„Umfährt man jedes Kräftedreieck eines Knotenpunktes, z. B. $P_1 S_1 S_2$ im Sinne der Kraftwirkung (Pfeil 1) und zeichnet die Richtungen der Kräfte auch am zugehörigen Knotenpunkt ein und wiederholt dies für alle Knotenpunkte, so erhält man im Seilpolygon sofort die Art der Beanspruchung, indem zwei mit den Spitzen einander zugekehrte Pfeile eine Zugbeanspruchung, zwei mit den Spitzen einander abgekehrte Pfeile eine Druckbeanspruchung kennzeichnen."

Die Beanspruchungen in den Seilabschnitten oder Seilstrecken AB, BC usw. sind also solche auf Zug, wie es ja auch nur möglich ist und auch vorausgesetzt war, in der Stange oder Strebe AE aber auf Druck.

Liegen die Aufhängungspunkte, wie es z. B. in Fig. 28 dargestellt ist, nicht in einer Horizontallinie, so ändert sich trotzdem nichts. Man zieht wieder parallel den Polstrahlen S_1 bis S_4 die Seilstrecken AB, BC, CD und DE und die Schlußlinie AE des Seilpolygons und parallel zu letzterer im Kräfteplan die Linie OB.

Umfährt man die einzelnen Dreiecke des Kräfteplans wieder im Sinne der Kräfte P_1, P_2 usw. und trägt die Richtungen im Seilpolygon an den Knotenpunkten ein, so ergeben sich die in der Figur eingezeichneten Pfeilrichtungen.

Da die Auflagerdrücke V_1 und V_2 entgegengesetzt zu P_1 bis P_3 gerichtet sein müssen, so muß z. B. das Dreieck OAB in der Richtung der Kraft V_1 umfahren werden, so daß für den Aufhängepunkt A z. B. V_1 nach oben, S_1 nach rechts und S_0 nach links gerichtet ist.

In gleicher Weise ergeben sich die Kraftrichtungen für den zweiten Aufhängungspunkt E. Da somit in S_0, der Schlußlinie des Seilpolygons, die Pfeile auseinander zeigen, so wird — wie dies auch nicht anders zu erwarten war — die Beanspruchung in derselben auf Druck stattfinden, die Verbindung zwischen A und E muß also als eine diesem Druck widerstrebende ausgeführt werden, weshalb sie als Strebe bezeichnet wird. Die Größe der Kraft ergibt sich aus dem Kräfteplan in der Größe der Linie $OB = S_0$.

Es war z. B.

$$P_1 = 15 \text{ mm} = 15 \cdot 10 \text{ kg} = 150 \text{ kg},$$
$$P_2 = 30 \text{ mm} = 30 \cdot 10 \text{ kg} = 300 \text{ kg},$$
$$P_3 = 25 \text{ mm} = 25 \cdot 10 \text{ kg} = 250 \text{ kg}.$$

Mithin $$R = \Sigma(P) = 700 \text{ kg}.$$

Aus dem Kräftedreieck ergibt sich ferner

$$S_1 = 58{,}5 \text{ mm} = 58{,}5 \cdot 10 \text{ kg} = 585 \text{ kg},$$
$$S_2 = 50 \text{ mm} = 50 \cdot 10 \text{ kg} = 500 \text{ kg},$$
$$S_0 = 45 \text{ mm} = 45 \cdot 10 \text{ kg} = 450 \text{ kg},$$
$$S_3 = 46 \text{ mm} = 46 \cdot 10 \text{ kg} = 460 \text{ kg},$$
$$S_4 = 57 \text{ mm} = 57 \cdot 10 \text{ kg} = 570 \text{ kg},$$
$$V_1 = 37 \text{ mm} = 37 \cdot 10 \text{ kg} = 370 \text{ kg},$$
$$V_2 = 33 \text{ mm} = 33 \cdot 10 \text{ kg} = 330 \text{ kg}.$$

Der Angriffspunkt der Mittelkraft R endlich findet sich durch Verlängerung der beiden äußersten Seilstrecken S_1 und S_4 bis zum Durchschnitt in M.

Nach dem Vorstehenden ist es leicht, die folgenden Aufgaben zu lösen.

1. Es sollen die Kräfte $P_1 = 200$ kg, $P_2 = 300$ kg, $P_3 = 180$ kg, $P_4 = 240$ kg so verteilt werden, daß die beiden Auflagerdrücke einander gleich sind, daß die Mittelkraft durch die Mitte zwischen den beiden Aufhängepunkten geht und daß endlich beide Aufhängepunkte in einer Horizontallinie liegen sollen.

Man ziehe zunächst A F, Fig. 29, horizontal, halbiere die Linie und errichte M M_0 senkrecht auf M, dann liegt auf ihr der Angriffspunkt M_0 der Mittelkraft. Man lege ferner die Kräfte P_1 bis P_4 lotrecht untereinander, A B D E F, halbiere diese Linie und ziehe in C ein Lot und wähle auf ihr den Pol O beliebig. Zieht man hierauf die Strahlen $OA = S_1$ und $OF = S_5$ und hierauf im Polygon von

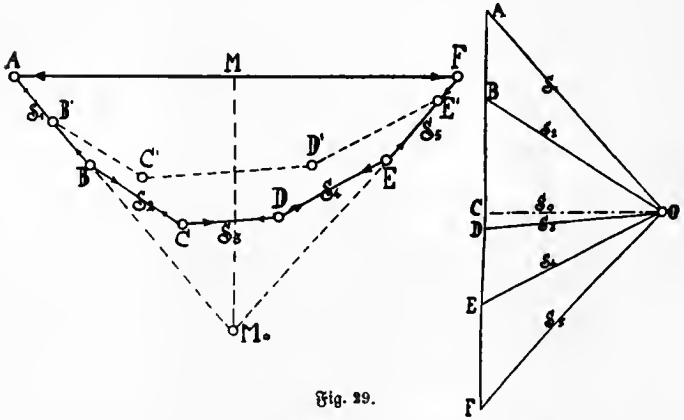


Fig. 29.

A und F Parallelen, so schneiden sich dieselben auf der Linie M M_0 in M_0, welcher Punkt der Angriffspunkt der Mittelkraft ist. Da AC = CF gemacht ist, und CO horizontal liegt, so ist auch CO die Schlußlinie des Polygons. Nun zieht man noch die Polstrahlen OB, OD, OE, und zu ihnen von einem beliebig gewählten Punkte B aus die Parallelen BC, CD und DE zu den Polstrahlen, so ist das Seilpolygon geschlossen. Da die Abstände der Kräfte P_1 bis P_4 voneinander nicht gegeben sind, so lassen sich beliebig viele Polygone unterhalb AF zeichnen, welche alle dieselbe Lösung geben, z. B. AB'C'D'E'F.

2. Es sollen vier gleiche Kräfte von je 200 kg in gleichem Abstand voneinander wirken, und soll die Schlußlinie horizontal sein und ihre Größe 300 kg betragen.

Man hat zunächst die Entfernung AF, Fig. 30, in fünf gleiche Teile a zu teilen und in jedem Teilpunkt eine Lotrechte nach unten zu ziehen. Im Kräftedreieck sind die vier Kräfte P_1 bis P_4 lotrecht untereinander zu tragen, in der Mitte das Lot $S_0 = 30$ mm zu errichten, so erhält man am Endpunkt desselben den Pol O. Nun zieht man nach den Endpunkten der Kräfte P_1 bis P_4 die Polstrahlen S_1 bis S_5 und zu diesen parallel von A bis zur ersten Vertikale, Punkt B, von hier bis zur zweiten Vertikale, Punkt C, usw. Durch Verlängerung von S_1 und S_5 bis zum Schnitt in M erhält man dort den Angriffspunkt der Mittelkraft. V_1 und V_2 sind einander gleich und je gleich $2 \cdot 200 = 400$ kg.

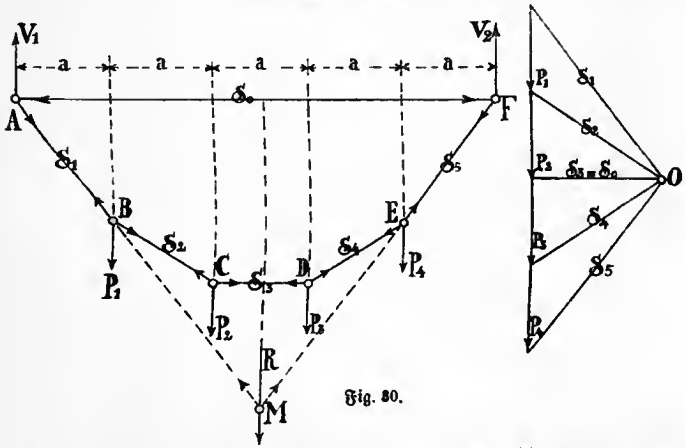


Fig. 30.

3. An zwei beliebig verschieden hochliegenden Aufhängepunkten A und E ist ein Seil aufgehängt und durch die beliebig in der Ebene, jedoch nicht parallel wirkenden Kräfte P_1, P_2 und P_3 gespannt. Es soll Lage und Größe der Mittelkraft, sowie Größe und Richtung der beiden in den Aufhängepunkten anzubringenden Gegenkräfte bestimmt werden.

In Fig. 31 sind A und E die Aufhängepunkte, B, C und D die drei Knotenpunkte, in welchen die Kräfte $P_1 = 250$ kg, $P_2 = 340$ kg, $P_3 = 200$ kg angreifen.

Man trägt zunächst im Kräftepolygon die Kräfte $AB = P_1$, $BC = P_2$ und $CD = P_3$ aneinander an, z. B. wieder im Maßstab 1 mm = 10 kg. Dann zieht man die Strahlen S_1, S_2, S_3 und S_4 parallel zu den Seiten AB, BC, CD und DE. Ist das System

im Gleichgewicht, so müssen sich alle Strahlen im Pole O_4 schneiden. Nun verbindet man A mit D, so ist AD die Resultante oder Mittelkraft von P_1 bis P_3. Verlängert man noch S_1 und S_4 im Seilpolygon bis zum Schnittpunkt M, und zieht hierdurch eine Parallele zur Mittelkraft AD im Kräftepolygon, so wirkt in dieser Linie die Mittelkraft R. Zieht man endlich noch im Seilpolygon die Schlußlinie AE und hierzu parallel den Strahl $OF = S_0$ im Kräftedreieck, so ist S_0 die Druckkraft in der Strebe AE, und $FA = V_1$ die Gegenkraft im Aufhängepunkt A, $FD = V_2$ die Gegenkraft im Aufhängepunkt E des Seilpolygons. Beide Kräfte sind parallel zur Mittelkraft R. Sollen jedoch die Auflagerkräfte vertikal wirken, so hat man die Vertikal- und Horizontalkomponenten V_1' von V_1 und V_2' von V_2 da-

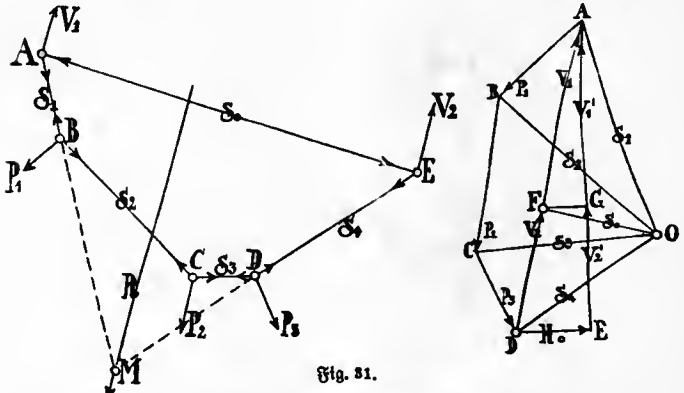


Fig. 31.

durch zu erhalten, daß man im Kräftepolygon von A eine Lotrechte nach unten zieht und von D die Linie $DE = H_0$ horizontal auf diese Lotrechte zieht, ebenso von F die Horizontale FG. Es ist dann V_1' die lotrechte Auflagerkraft in A und V_2' diejenige in B. Wie aber aus dem Kräfteplane sofort hervorgeht, muß in letzterem Falle noch eine Horizontalkraft H_0 in den Aufhängepunkten A oder E in der Richtung des Pfeiles in DE im Kräfteplan wirken, damit das ganze System im Gleichgewicht bleibt. Dies ist auch aus dem Seilpolygon ohne weiteres ersichtlich, da ohne diese horizontale Hilfskraft das ganze System durch die schräge Richtung der Mittelkraft R nach links verschoben würde.

In ähnlicher Weise lassen sich zahlreiche andere Aufgaben auf dem einfachen Wege der Beziehungen zwischen Seilpolygon und Kräftedreieck oder Kräftepolygon lösen.

4. Kapitel.

Die Kräftewirkungen am starren, gestützten Körper.

Die im vorigen Kapitel für die biegsamen Körper (Seile) gefundenen Beziehungen und Lehrsätze lassen sich nun auf die starren, gestützten Körper anwenden, und ermöglichen in sehr leichter und übersichtlicher Weise die Kräftewirkungen in denselben zu veranschaulichen und zu berechnen.

Die Umkehrung des Seiles mit zwei Aufhängepunkten und einem Knotenpunkt ist der einfache Dreiecksbinder oder das einfache Hängewerk, wie es in Fig. 32 dargestellt ist.

Im oberen Knotenpunkt A wirkt die Kraft P, z. B. = 500 kg (50 mm). In den Punkten B und C ist das System aufgelagert und übt dort zwei Vertikaldrücke aus. Damit Gleichgewicht ist, müssen zwei Vertikalkräfte, die Auflagerreaktionen V_1 und V_2

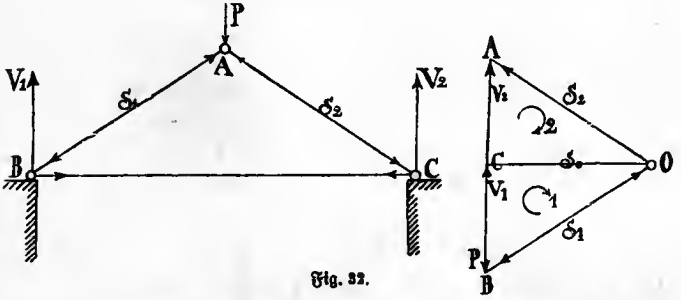


Fig. 32.

lotrecht nach oben wirken. Dieselben sowie die Kräfte in den drei Seiten des Dreiecks A B C sind nun nach den im vorigen Kapitel entwickelten Regeln sofort leicht durch Zeichnen des Kräftedreiecks zu bestimmen, wie in Fig. 32 dargestellt ist. Umfährt man in dem letzteren das Dreieck B O C in der Richtung von V_1 nach oben (Pfeil 1), so erhält S_1 im Knotenpunkt B einen Pfeil nach links unten, im Knotenpunkt A dagegen, da der Pfeil dort umkehrt eingezeichnet werden muß, wie im Knotenpunkt B, einen solchen nach rechts oben. Beide Pfeile zeigen auseinander. Es tritt also in A B eine Druckkraft auf, wie dies auch nicht anders zu erwarten war. Dasselbe ergibt sich in gleicher Weise für S_2. Die Schlußlinie B C erhält eine Zugbeanspruchung, wie durch Umfahren des unteren oder oberen Kräftedreiecks A C O oder B C O leicht festzustellen ist.

Bei dem in Fig. 33 dargestellten Sprengwerk sind die Punkte A, B, C und D je mit der Kraft P_1 bis P_4 belastet. Aus dem Kräftedreieck ergeben sich die Größen und Arten der Beanspruchungen in den schrägen Streben und der mittleren horizontalen Strebe B C in bekannter Weise.

Sehr interessante Beispiele dieser Kraftwirkungen bieten die zahlreichen verschiedenen Arten von Dach-

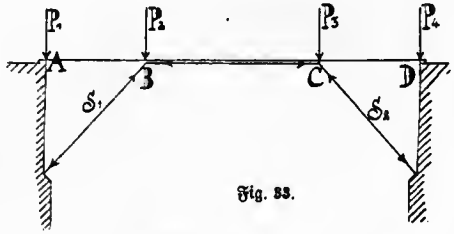


Fig. 33.

stühlen und Fachwerksträgern, von welchen im folgenden nur einige wenige untersucht werden sollen.

So stellt Fig. 34 den einfachsten Dreiecksverband eines kleinen Dachstuhls, eines sogenannten Satteldaches dar. Im Kräfteplan sind zunächst wieder die Kräfte P_1 bis P_5, z. B. je = 600 kg, im Maßstab 1 mm = 50 kg aneinander zu tragen. Die beiden Auf-

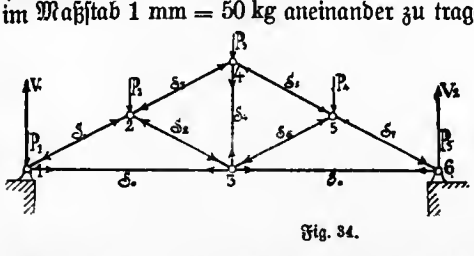


Fig. 34.

lagerdrücke in den Punkten 1 und 6 sind je gleich der halben Summe von P_1 bis P_5; also ist die Kraftlinie zu halbieren. Es wirken dann V_1 und V_2 nach oben, da sie Gewichtsbelastungen P_1 bis P_5 entgegengesetzt gerichtet sind.

Für den Knotenpunkt 1 gilt folgendes. Vom Punkt A im Kräfteplan ist V_1 nach oben gerichtet, P_1 nach unten. Der Linienzug im Kräfteplan ist somit für den Punkt 1 folgender: A B C D A, indem von C aus eine Parallele zu S_1 im Bauplan, und von A aus eine Parallele zu S_0 im Bauplan

gezogen wird. In gleicher Weise ist für den Knotenpunkt 2 zu verfahren. P_2 und S_1 sind bekannt, es fehlen S_2 und S_3. Man zieht also von D aus eine Parallele zu S_2 und vom Endpunkt von P_2 aus eine solche zu S_3, so erhält man das Viereck CDEF. Für Knotenpunkt 4 sind bekannt P_3 und S_3, zu suchen S_4 und S_5. Man erhält sie, indem man von E aus eine Parallele EG zu S_4 und von G aus eine Parallele GH zu S_5 zieht. Das Kräftevieleck für Knotenpunkt 4 ist dann EFHG.

Verfährt man so weiter für die übrigen Knotenpunkte, so erhält man schließlich den Kräfteplan BCDJK. Die Entscheidung über Zug- und Druckbeanspruchung ergibt sich einfach durch Umfahren der einzelnen Vierecke und Einzeichnen der Pfeile, wie es in der Figur geschehen ist. Demnach werden die Streben S_1, S_2, S_3, S_5, S_6 und S_7 auf Druck, die Stangen S_0, S_0 und S_4 auf Zug beansprucht. Die Größe der einzelnen Kräfte ergibt sich aus dem Kräfteplan zu:

$$
\begin{aligned}
S_1 = S_7 &= 38 \text{ mm} = 38 \cdot 50 = 1900 \text{ kg},\\
S_2 = S_6 &= 12 \text{ mm} = 12 \cdot 50 = 600 \text{ kg},\\
S_3 = S_5 &= 26 \text{ mm} = 26 \cdot 50 = 1300 \text{ kg},\\
S_0 &= 34 \text{ mm} = 34 \cdot 50 = 1700 \text{ kg},\\
S_4 &= 11{,}5 \text{ mm} = 11{,}5 \cdot 50 = 575 \text{ kg},\\
V_1 = V_2 &= 30 \text{ mm} = 30 \cdot 50 = 1500 \text{ kg}.
\end{aligned}
$$

In Fig. 35 ist ein einfacher Fachwerksbrückenträger dargestellt, welcher in der Mitte durch eine Tenderlokomotive von 42 t = 42 000 kg Gewicht belastet sein soll. Da stets zwei solcher Träger vorhanden sind, so kommt auf jeden die Hälfte des Gewichtes, also $P_2 = 21\,000$ kg. In den Knotenpunkten 3 und 7 mögen je noch die Kräfte $P_1 = P_3 = 1000$ kg wirken.

Von Knotenpunkt 1 ausgehend, in welchem V_1, S_1 und S_2 wirken, hat man wieder zunächst für diese drei Kräfte das Kräftedreieck im Kräfteplan zu zeichnen und im Bauplan die entsprechenden Pfeilrichtungen anzugeben. In gleicher Weise ist mit den folgenden Knotenpunkten 2 bis 9 zu verfahren. Man erhält so den unter der Brücke gezeichneten Kräfteplan, welcher, da die Belastung eine symmetrische ist, ebenfalls symmetrisch erscheint. Wie aus dem Bauplan hervorgeht, sind die Streben S_1, S_4, S_5, S_8, S_{11}, S_{12} und S_{15} auf Druck beansprucht, die Stangen S_2, S_3, S_6, S_7, S_9, S_{10}, S_{13} und S_{14} dagegen auf Zug.

Da jedoch die Lokomotive von den Enden her auf die Brücke fährt, so ist auch der Fall zu untersuchen, wenn die Lokomotive z. B. über den Knotenpunkten 3 oder 7 steht. Wie zunächst sofort klar ist, wird dann die Belastung eine unsymmetrische sein und der Kräfteplan ein ebenfalls unsymmetrisches Bild ergeben.

Jetzt sind die Auflagerdrücke V_1 und V_2 nicht mehr gleich. Zur Ermittelung derselben ist vielmehr jetzt die statische Momentengleichung z. B. für den Knotenpunkt 1 aufzustellen.

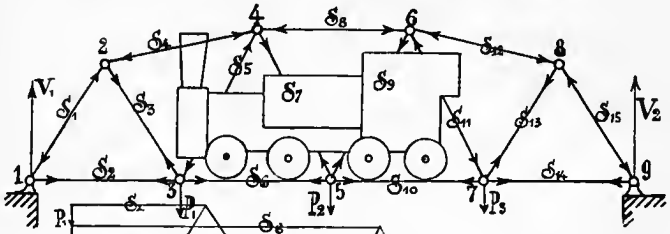
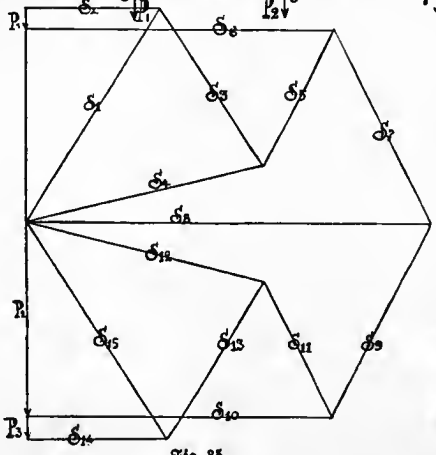


Fig. 35.



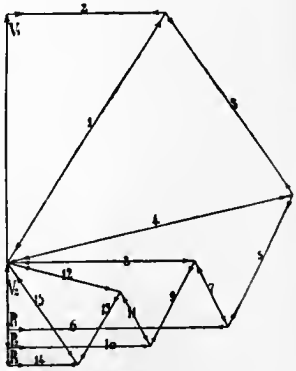


Fig. 35 a.

Es soll z. B. die Last P_1 jetzt $= 21\,000$ kg sein, P_2 und P_3 dagegen nur je 1000 kg. Dann gelten die Gleichungen:

$$P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + P_3 \cdot 3 = V_2 \cdot 4 \text{ und}$$

$$V_1 + V_2 = P_1 + P_2 + P_3.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wenn die Werte eingesetzt werden,

$$V_2 = \frac{21\,000 \cdot 1 + 1000 \cdot 2 + 1000 \cdot 3}{4} = \frac{26\,000}{4} = 6\,500 \text{ kg und ferner}$$

$$V_1 = 21\,000 + 1000 + 1000 - 6\,500 = 23\,000 - 6\,500 = 16\,500 \text{ kg}.$$

Die Konstruktion des Kräfteplanes erfolgt in derselben Weise wie vorher. Zu beachten ist, daß der Maßstab kleiner gewählt ist, und zwar 1 mm = 500 kg.

Zunächst ergibt sich aus dem Kräfteplan, daß die Strebe S_6, welche beim vorigen Belastungszustand auf Druck beansprucht war, jetzt auf Zug beansprucht ist. Das Umgekehrte gilt von Strebe S_7, welche früher mit Zug, jetzt mit Druck beansprucht ist. Für die Stellung der Hauptlast über Knotenpunkt 7 würden entsprechend S_{11} auf Zug und S_9 auf Druck beansprucht werden. Die Diagonalen S_6, S_7, S_9 und S_{11} sind also je nach der Stellung der Lokomotive abwechselnd mit Zug oder Druck belastet und dementsprechend auszubilden. Das obere Polygon $S_1 S_4 S_8 S_{12} S_{15}$ erhält dauernd Druckbeanspruchung, die Horizontalen $S_2 S_6 S_{10} S_{16}$ dauernd Zugbeanspruchung, ebenso S_3 und S_{13}.

Die absoluten Größen der Kräfte lassen sich leicht aus den Kräfteplänen ermitteln, wie es oben mehrfach gezeigt ist. Zu beachten ist nur, daß für jeden Konstruktionsteil die absolut größte, aus den gezeichneten Kräfteplänen sich ergebende Zug- oder Druckbeanspruchung als diejenige Kraft zugrunde zu legen ist, für welche dann die Festigkeit des betreffenden Konstruktionsteiles zu berechnen ist.

Es dürfte nun nicht schwer sein, an der Hand der vorstehend gegebenen Ausführungen auch kompliziertere Systeme zu untersuchen, jedoch können hier, da es sich nur um die Einführung in die Methode handelt, weitere Beispiele aus Raummangel nicht behandelt werden.

5. Kapitel.

Die Schwerkraft und der Schwerpunkt.

Wie oben, S. 5, ausgeführt ist, fällt ein auf einer Unterlage ruhender Körper, sobald die Unterlage entfernt wird, nieder, er bewegt sich gegen den Mittelpunkt der Erde hin in der gleichen Richtung, welche ein an einem Faden aufgehangener Körper, ein Lot, anzeigt. Denn auch dieser Körper wird stets nach dem Mittelpunkt der Erde hin gezogen. Man sagt daher, daß der fallende Körper sich lotrecht nach unten bewegt. Trifft er auf die Erdoberfläche, so kommt er zur Ruhe, fällt er dagegen in einen in der Erdoberfläche befindlichen Brunnen, Schacht, Abgrund o. dgl., so wird er immer weiter nach dem Erdinnern zu gelangen.

Die Kraft nun, welche diese Bewegung verursacht, heißt die Anziehungskraft der Erde oder die Schwerkraft und wird diese auf alle Körper der Erdoberfläche und oberhalb derselben gleichmäßig ausgeübt; sie hört auch an der Oberfläche der Erde nicht auf, wie wir gesehen haben, sondern wirkt bis in den Mittelpunkt der Erde hinein.

Ruht der Körper auf der Erdoberfläche, so wird er vermöge dieser Anziehungskraft auf den unter ihm befindlichen, starren Körper einen bestimmten Druck ausüben, welcher abhängig ist von seiner Größe (dem Inhalt oder Volumen) und dem Material, aus welchem er besteht. Ein Raummeter Holz wird einen geringeren Druck ausüben, als ein Raummeter Steinkohlen, dieser wieder weniger als ein Raummeter Ziegelsteine usw. Man nennt nun den Druck, welchen der Körper auf seine Unterlage ausübt, sein Gewicht oder seine Schwere.

Wie oben angedeutet ist, ist das Gewicht eines Körpers von zwei Faktoren abhängig, nämlich erstlich von der Menge der einzelnen kleinsten Teilchen, aus welchen der Körper besteht, oder der Masse des Körpers, also auch von seiner Größe oder seinen äußeren Abmessungen, seinem Volumen und zweitens von der Anziehung, welche jedes solches Massenteilchen erfährt.

Die internationale Generalkonferenz für Maß und Gewicht hat in Ausübung der ihr durch die Meterkonvention vom 20. Mai 1875 zugewiesenen Fürsorge für die Verbreitung und Vervollkommnung des metrischen Systems in der im Oktober 1901 in Paris abgehaltenen Versammlung folgende Begriffsbestimmung für „Gewicht" angenommen:

> „Der Ausdruck Gewicht bezeichnet eine Größe gleicher Art wie eine Kraft; das Gewicht eines Körpers ist das Produkt der Masse dieses Körpers mit der Beschleunigung der Schwere."

Diese letztere ist jedoch nicht überall auf der Erdoberfläche gleich, sondern ist veränderlich mit der Höhe über der Erdoberfläche und der geographischen Lage auf der Erde (wegen der nicht kugelförmigen, sondern ellipsoidischen Gestalt der Erde).

So ist z. B. das Gewicht derselben Masse unter sonst gleichen Umständen in Petersburg um etwas mehr als $\frac{1}{6}$ % größer als in Madrid. Um demnach den Begriff des Gewichtes eindeutig zu bestimmen, ist ferner festgesetzt: „insbesondere das normale Gewicht eines Körpers ist das Produkt der Masse dieses Körpers mit der

normalen Beschleunigung der Schwere." Der im internationalen Maß- und Gewichtsdienste für den Wert der normalen Beschleunigung der Schwere angenommene Wert ist 980,6 cm in 1 Sekunde.[1])

Für die Einheit der Masse und des Gewichts sind folgende internationalen Vereinbarungen getroffen: „Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototypes."

Nach Schell[2]) versteht man unter der Masse eines Körpers die Eigenschaft der Materie, insbesondere der materiellen Punkte, unter der Wirkung derselben Kraft eine verschiedene Beschleunigung anzunehmen. Die Masse eines materiellen Punktes ist um so größer, je kleiner die ihm von derselben Kraft erteilte Beschleunigung ist. Als Maßstab für die Massen dient die Masse des Urkilogramms in Paris, und die Vergleichung der Massen erfolgt an der Wage unter Vermittlung der Schwerkraft; die Massen verhalten sich wie die Gewichte am selben Orte.

Das Gewicht G, d. h. die Kraft, welche der Masse m die Beschleunigung g = 980,6 cm oder 9,806 m ~ 9,81 m in der Sekunde erteilt, ist daher G = m . g und die Masse dieses Körpers daher $m = \frac{G}{g}$.

Zur Messung der Gewichte der Körper ist, wie oben bereits bemerkt, als Einheit das Kilogramm international festgesetzt, d. h. das Gewicht eines Liters (1 l) reinen Wassers von 4° C unter dem Breitegrad von Paris.[3])

Wie oben ausgeführt, ist die Schwerkraft für jedes Massenteilchen nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet und ist daher die Annahme gerechtfertigt, daß alle Schwerkräfte eines Körpers parallel gerichtet sind. Da nach dem Früheren alle parallel gerichteten Kräfte eines starren Systems durch eine einzige Resultante, die Mittelkraft, ersetzt werden können, so kann dies auch hier geschehen. Diese Mittelkraft ist die Schwere oder das Gewicht des Körpers und ihr Angriffspunkt der Schwerpunkt des Körpers. Man kann somit alle Wirkungen der einzelnen Schwerkräfte der Massenteilchen eines Körpers ersetzen durch die im Schwerpunkt angreifende Schwerkraft oder das Gewicht des Körpers.

1) Lexikon d. gesamten Technik, 2. Aufl. Bd. IV, S. 485.
2) Ebenda, 2. Aufl. Bd. VI, S. 317.
3) Über das absolute Maß-System s. weiter unten II. Teil, Dynamik, Einleitung.

Es ist daher die nächste Aufgabe, diesen Schwerpunkt für die verschiedenen Körper zu bestimmen, um die Untersuchungen über die Kraftwirkungen auf die Körper zu vereinfachen. Entsprechend den drei Dimensionen hat man daher wieder die Untersuchungen 1. auf Linien, 2. auf Flächen und 3. auf Körper auszudehnen.

1. Bestimmung des Schwerpunkts von Linien.

Man hat auch hier wieder drei Arten von Linien zu unterscheiden: gerade, gebrochene und gekrümmte Linien.

Für eine gerade Linie ist die Bestimmung äußerst einfach, da der Schwerpunkt derselben in der Mitte derselben liegen muß, weil sonst kein Gleichgewicht herrschen kann.

Für eine gebrochene Linie sind die Schwerpunkte der einzelnen Strecken und hierauf die Resultierende aller Einzelschwerkräfte zu bestimmen.

Für gekrümmte Linien ist derselbe Weg einzuschlagen wie vorher, indem der Bogen als eine große Anzahl kleiner gerader Strecken anzusehen ist, deren Einzelschwerpunkte und Schwerkräfte zu bestimmen sind, woraus die Resultierende sich leicht ermitteln läßt.

Da die Schwerpunktsbestimmungen von Linien praktisch selten vorkommen, mag das Gesagte genügen.

2. Bestimmung des Schwerpunkts von Flächen.

a) Die Dreiecksfläche.

Denkt man sich dieselbe zunächst parallel zur Grundlinie AB in sehr viele, sehr nahe beieinanderliegende gerade Linien zerlegt,

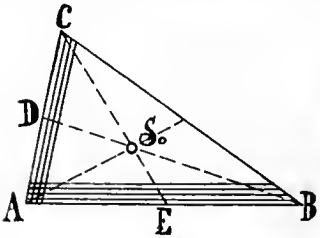


Fig. 36 a.

Fig. 36 a, so liegt der Schwerpunkt aller dieser Linien in ihrer Mitte. Also ist die Mittellinie CE von C nach der Mitte von AB, der eine geometrische Ort für den Schwerpunkt. Dasselbe gilt für die Parallelen zu AC. Indem man die Mittellinie BD zieht, schneidet sie die erstere Mittellinie CE. Da auch sie der geometrische Ort des Schwerpunktes ist, so ist der Schnittpunkt S_0 beider Mittellinien der Schwerpunkt des Dreiecks.

b) Quadrat, Rechteck und Parallelogramm.

Auch hier führt die gleiche Überlegung wie beim Dreieck zum Ziel. Wird das Quadrat nämlich in Parallelen zur einen Seite zerlegt, Fig. 36b, so liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie durch alle Parallelen. Ebenso kann eine Zerlegung parallel zur anderen Seite erfolgen. Zieht man auch diese Mittellinie, so ist der Schnittpunkt beider Linien der Schwerpunkt.

Fig. 36b.

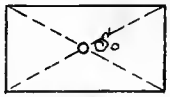


Fig. 36c.

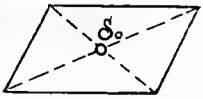


Fig. 36d.

Da aber nach bekannten Sätzen der Geometrie die Diagonalen des Quadrates sich ebenfalls im Mittelpunkte desselben schneiden, so sind zur Ermittelung des Schwerpunkts einfach die beiden Diagonalen zu ziehen, ihr Schnittpunkt ist der Schwerpunkt. Dasselbe Verfahren gilt für das Rechteck, Fig. 36c, und Parallelogramm, Fig. 36d.

c) Das Trapez.

Bei demselben ist zunächst die Mittellinie E F der parallelen Seiten A B und C D, Fig. 37, zu ziehen, so liegt auf ihr jedenfalls der Schwerpunkt. Einen zweiten geometrischen Ort erhält man, wenn man das Trapez zu einem Parallelogramm vervollständigt, indem man an D C die Strecke C H gleich der größeren Parallelen des Trapezes und an A B die Strecke G A gleich der kleineren Parallelen des Trapezes anträgt. Verbindet man H mit G, so ist der Schnittpunkt von G H mit E F der Schwerpunkt S_0.

d) Das allgemeine Viereck.

Dasselbe wird zunächst durch die Diagonale B C, Fig. 38, in zwei Dreiecke zerlegt und für jedes derselben in bekannter Weise der Schwer-

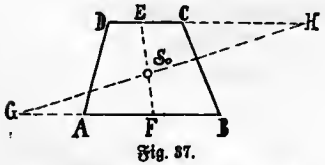


Fig. 37.

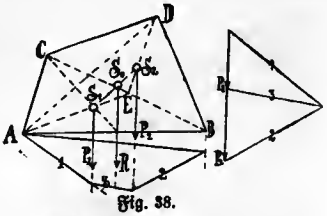


Fig. 38.

punkt S_1 und S_2 gesucht. Sind nun die Kräfte (Einzelgewichte) bekannt, welche in S_1 und S_2 wirken, so läßt sich leicht mit Hilfe des Kräftedreieckes und Seilpolygons die Richtung der Resultierenden

von P_1 und P_2, also der Angriffspunkt derselben oder der Schwerpunkt, finden, wenn man noch S_1 mit S_2 verbindet. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der lotrechten Richtung von R ist der Schwerpunkt.

Man kann aber auch, wenn nur die Größe von R, also das Gewicht des Vierecks, bekannt ist, den Schwerpunkt dadurch bestimmen, daß man zwei verschiedene Seilpolygone, so z. B. eines unterhalb A B als Auflagerstrecke und eines unter B D als Auflagerstrecke konstruiert und den Durchschnittspunkt beider Resultanten zeichnet. Derselbe ist der Schwerpunkt des Vierecks.

Der Schwerpunkt eines beliebigen Vielecks wird gefunden, indem man dasselbe durch Diagonalen in eine Anzahl von Dreiecken zerlegt, den Schwerpunkt jedes Dreiecks bestimmt und endlich den

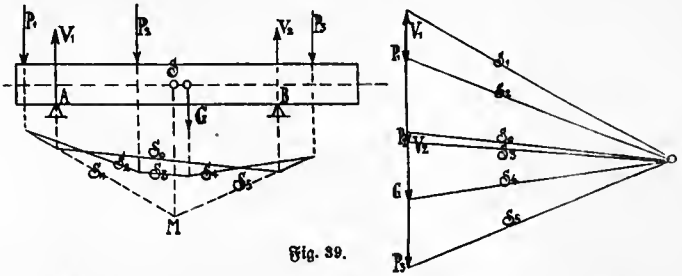


Fig. 39.

resultierenden Schwerpunkt aller Einzelschwerpunkte in der vorstehend angedeuteten Weise ermittelt.

Der Schwerpunkt eines regulären Vielecks, z. B. Sechsecks oder Achtecks, liegt im Mittelpunkt des dem Vieleck eingeschriebenen oder umschriebenen Kreises.

Der Schwerpunkt eines Kreises ist der Mittelpunkt dieses Kreises.

Für die statische Berechnung von Baukonstruktionen ist eine der wichtigsten Aufgaben die Ermittelung des Schwerpunktes von mit Einzellasten und kontinuierlichen Belastungen beanspruchten Balken, sogenannten Trägern, deren Eigengewicht gleichfalls in Betracht kommt. Einige Fälle dieser Art sollen in folgendem noch behandelt werden.

In Fig. 39 ist zunächst ein Balken oder Träger abgebildet, welcher ein bestimmtes Gewicht G habe, das im Schwerpunkt angreift, und außerdem von den Kräften P_1, P_2 und P_3 belastet ist, während der Balken in den Punkten A und B gelagert ist. Es soll der Schwerpunkt des ganzen Systems bestimmt werden.

Da alle Kräfte parallel wirken, sind dieselben in einem bestimmten Maßstab in bekannter Weise aneinander zu tragen, hierauf ein Pol O zu wählen, die Polstrahlen S_1 bis S_6 und hierzu parallel das Seilpolygon zu ziehen. Verbindet man endlich noch die Knotenpunkte auf den Lotrechten durch V_1 und V_2 miteinander durch die Linie S_0 und zieht im Kräftedreieck hierzu eine Parallele, so teilt diese die Kraftlinie in die beiden Strecken V_1 und V_2, welche die Auflagerdrücke in A und B ergeben. Verlängert man noch die Strahlen S_1 und S_5 im Seilpolygon bis zum Schnittpunkt M, so liegt in der Lotrechten hierdurch der Schwerpunkt des ganzen Systems.

Ist ein Träger auf seiner ganzen Länge völlig gleichmäßig belastet, so wird diese Belastungsart durch eine zum Träger parallele Rechteckfläche versinnbildlicht, wie es in Fig. 40 geschehen ist. Der

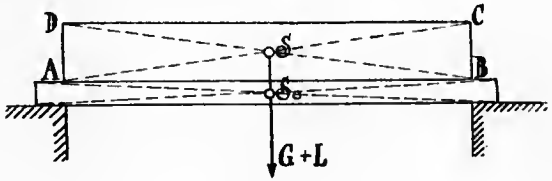


Fig. 40.

Schwerpunkt der gleichförmigen Belastung liegt somit in der Mitte über dem Schwerpunkt des Trägers selbst, S und S_0. Die in der Mitte wirkende Belastung ist dann gleich dem Eigengewicht G des Trägers, vermehrt um die im Schwerpunkt angreifend gedachte Gesamtlast L, also $= G + L$. Die Höhe AD des Rechtecks ABCD gibt dann in bestimmtem Maßstab, z. B. 1 mm = 10 kg, die Belastung pro Längeneinheit an. Ist z. B. AD = 12 mm, so ist die Belastung pro Längeneinheit $= 10 \cdot 12 = 120$ kg. Es sei z. B. die Länge des Trägers zwischen den Auflagern A und B = 5 m und die Belastung pro cm Längeneinheit = 12 kg, so ist die Gesamtlast $= 500 \cdot 12 = 6000$ kg = 6 t. Hierzu kommt noch das Eigengewicht des Trägers G.

Bei dem in Fig. 41 dargestellten Träger ist die Belastung ungleichförmig, und ist dieselbe durch verschieden hohe Rechtecke dargestellt. Der Schwerpunkt läßt sich hierbei wieder leicht durch Zeichnen des Seilpolygons bestimmen. Er liegt in der Lotrechten über dem Schnittpunkt M der Seilstrahlen S_1 und S_8, in welcher die Resultierende R von den Belastungen 1 bis 6 und dem Eigengewicht 7 des Trägers angreift.

3. Bestimmung des Schwerpunkts von Körpern.

Bei symmetrischen Körpern mit ebenen und gekrümmten Oberflächen liegt der Schwerpunkt bei homogener Massenverteilung

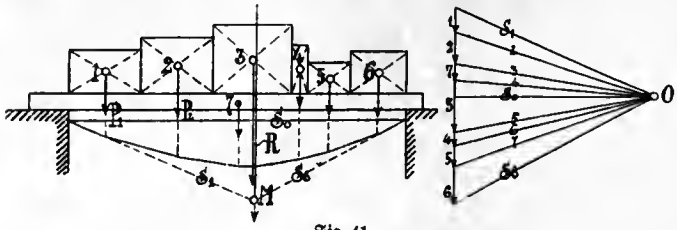


Fig. 41.

stets im geometrischen Mittelpunkt des Körpers, so beim Würfel, beim drei-, vier- und mehrseitigen Prisma, beim Zylinder, bei der Kugel.

Bei der Bestimmung des Schwerpunktes unregelmäßiger Körper, welcher Fall im allgemeinen sehr selten eintritt, sind diese Körper in sehr viele parallele Flächen zu zerlegen und die Schwerpunkte der Flächen nach den obigen Regeln zu bestimmen, sodann aber aus den einzelnen Schwerkräften der Flächen das Kräfte- und Seilpolygon zu bilden und danach die Lage des Angriffspunktes der Resultanten, also der Schwerpunkt, zu bestimmen.

Da die Schwerpunktsbestimmungen von Körpern überhaupt selten vorkommen, so mag das hier Angedeutete genügen.

6. Kapitel.

Die Belastungsmomente und die Momentenflächen.

Die in den vorigen Kapiteln abgeleiteten Lehrsätze von den Seilpolygonen geben eine sehr wertvolle Handhabe, die auf einen Körper ausgeübten Belastungen und deren statische Momente übersichtlich zur Anschauung zu bringen und auch die Größen der äußeren Momente an beliebigen Stellen eines belasteten Körpers direkt zu ermitteln.

Der einfachste Fall, einer Belastung durch eine einzige Kraft, enthält zwei Möglichkeiten der Belastung. Entweder kann, wie in Fig. 42 dargestellt, der Körper einseitig befestigt, eingemauert sein, und ist der Körper am Ende oder an einer beliebigen Stelle des freien Endes belastet. Man nennt den Körper dann **freitragend**. Oder der Körper kann auf zwei Auflagerpunkten aufruhen und ist zwischen

denselben belastet, Fig. 43. Eine Kombination beider Belastungsarten ist die in Fig. 39 dargestellte Belastung, bei welcher der Körper oder Träger sowohl zwischen den Auflagerpunkten als auch außerhalb derselben belastet ist. P_1 und P_3 wirken dort außerhalb, P_2 innerhalb der Auflager A und B.

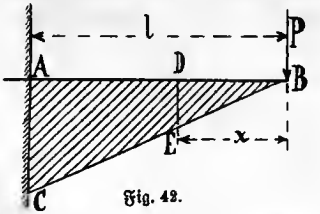


Fig. 42.

Bei der in Fig. 42 dargestellten Belastung wirkt die Kraft P am Ende B des Trägers AB. Das statische Moment bezogen auf den Punkt A ist somit $M = P \cdot l$. Für einen beliebigen Zwischenpunkt z. B. D, ist das Moment $M_1 = P \cdot x$. Die beiden Momente verhalten sich also $M_1 : M = P \cdot x : P \cdot l$ oder wie $\frac{x}{l}$. Zieht man nun von B eine beliebige Linie, z. B. B C, nach der Lotrechten durch A, so entsteht das Dreieck A B C, die sogenannte Momentenfläche. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt A B : D B = A C : D E oder $l : x = AC : DE$, d. h. die Lotrechten der Momentenfläche verhalten sich wie die Hebelarme und, da diese sich direkt wie die Momente verhalten, auch wie die Momente. Die Strecken A C und D E sind also direkt ein Maß für die Momente an den betreffen-

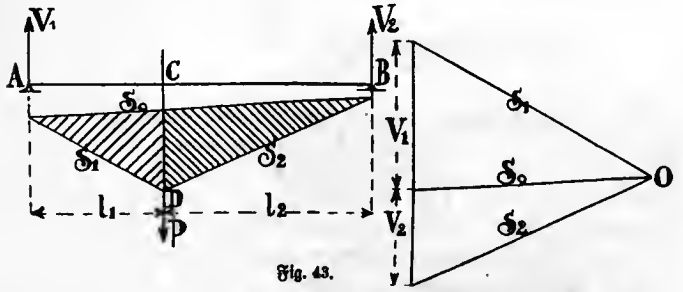


Fig. 43.

den Stellen. Wird noch ein bestimmter Maßstab für die Strecke A C gewählt, z. B. 1 mm = 100 mkg, so gibt die Momentenfläche für jede beliebige Strecke die Größe des Momentes in Meterkilogramm an.

Bei der Belastung nach Fig. 43 ergibt sich die Momentenfläche als die von den Linien S_1, S_2 und S_0 eingeschlossene (schraffierte) Fläche. Sie setzt sich aus zwei Momentenflächen nach Fig. 42 zusammen, da man annehmen kann, daß der Träger bei C befestigt sei und links

das Moment $V_1 \cdot l_1$, rechts das Moment $V_2 \cdot l_2$ wirke. Da beide Momente gleich sind (weil sonst kein Gleichgewicht in C bestände), so sind auch die Momentenordinaten in der Mitte bei CD gleich. Die Fläche läßt genau erkennen, wie die Momente zunehmen, wo das größte Moment ist, und gestattet auch die absolute Größe des Momentes an allen Stellen aus den Werten V_1 und l_1 und dem gewählten Maßstab für die Momentenfläche zu berechnen.

Besonderen Wert gewinnt aber die Anwendung der Momentenflächen erst bei komplizierteren Belastungsfällen, wie im folgenden gezeigt ist, da sie sofort das Maximalmoment und die Beanspruchungen des ganzen Trägers an allen Stellen erkennen läßt.

Bei dem in Fig. 44 dargestellten Träger ist z. B. die Beanspruchung zwischen den Auflagern A und B von den Kräften 1, 2 und 4 nach unten, von den Kräften 3 und 5 nach oben. Trägt man die Kräfte wieder in richtiger Reihenfolge in der Kraftlinie auf und zieht nach einem beliebigen Pol O die Strahlen, konstruiert nach diesen das Seilpolygon und die Momentenfläche, so ergibt dieselbe folgendes.

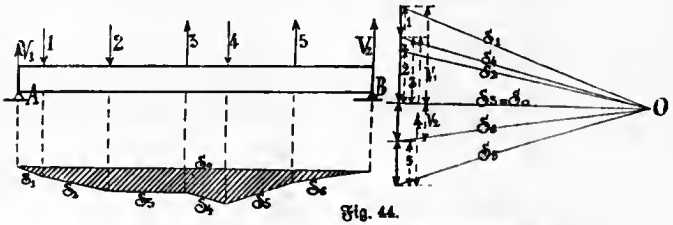


Fig. 44.

Von A aus gerechnet nimmt das Moment allmählich zu und ist zwischen den Kräften 2 und 3 konstant, da S_0 und S_3 im Kräfteplan zusammenfallen, also im Seilpolygon parallel sind; in der Richtungslinie der Kraft 4 ist das Moment am größten und nimmt dann nach dem anderen Auflagerpunkt B wieder ab. Um z. B. die absolute Größe des äußeren Momentes bei Last 4 berechnen zu können, muß dasselbe für irgendeinen Punkt z. B. bei Last 1 bekannt sein. Ist z. B. $V_1 = 450$ kg, der Abstand l_1 zwischen V_1 und der Last 1 $= 0{,}9$ m, so ist das Moment bei Last $1 = 450 \cdot 0{,}9 = 405$ mkg. Die entsprechende Strecke der Momentenfläche beträgt[1]) 2,5 mm. Die Strecke unterhalb Last 4 ist 8,5 mm, das Maximalmoment also $405 \cdot \frac{8{,}5}{2{,}5} = 1377$ mkg.

1) im richtigen Maßstabe; die Figur ist auf etwa $^1/_2$ verkleinert.

In gleicher Weise läßt sich dasselbe für jeden beliebigen anderen Querschnitt aus dem Verhältnis der zugehörigen Strecke der Momentenfläche zu einer bekannten Strecke, z. B. der obigen von 2,5 mm berechnen.

Bei der Belastung nach Fig. 45 ist der Balken an beiden Seiten frei tragend und an den Enden sowie zwischen den Auflagern belastet. Die Kräfte 1, 2, 3, 5, 6 wirken im Sinne der Schwerkraft, diejenigen V_1, 4, V_2 entgegengesetzt, also nach aufwärts. Die Konstruktion des Kräfteplanes und der Momentenfläche bedarf nach dem Früheren keiner Erklärung mehr.

Die untere Momentenfläche ist die nach dem Kräfteplan gezeichnete, die obere die auf eine horizontale Schlußlinie übertragene, welche

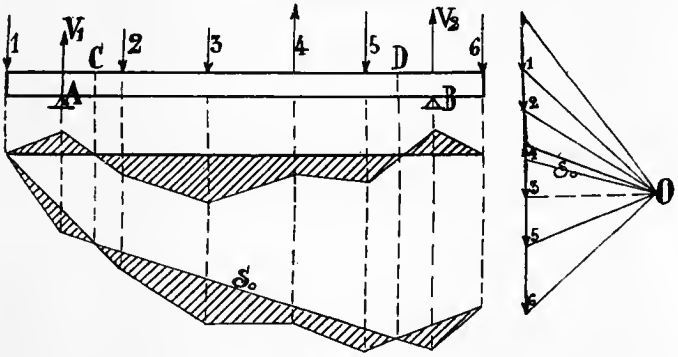


Fig. 45.

jedoch die gleichen Ordinaten wie die untere Fläche besitzt. Sie läßt folgende interessante Schlüsse über die Beanspruchung des Trägers zu.

Von links ausgehend findet man zunächst ein zunehmendes Moment bis zum Belastungspunkt A. Von hier an nimmt das Moment ab und ist im Punkte C gleich Null, wächst dann wieder bis zum Belastungspunkt der Last 3, wo es den absolut größten Wert erreicht, nimmt bis 4 ab, wächst bis 5 etwas, sinkt von dort bis zum Punkte D auf Null, wächst bis B wieder und nimmt dann gegen das Ende des Trägers bis Null ab. Die Fläche läßt also sofort erkennen, daß zwei Punkte C und D vorhanden sind, in welchen der Träger überhaupt kein statisches Moment erhält, und zeigt auch sonst in einfacher und übersichtlicher Weise den Verlauf der Beanspruchungen wie es beim rechnerischen Wege nicht so einfach zu erkennen wäre.

Die Momentenflächen geben somit das Mittel an die Hand, die Abmessungen der belasteten Balken rasch und einfach nach den Gesetzen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre zu berechnen, worauf hier nur hingewiesen werden kann, da dieselbe nicht in den Rahmen dieser Untersuchungen gehört.

Zweiter Teil.

Die Dynamik.

Einleitung.

Wie in der Einleitung zum ersten Teil bereits ausgeführt worden ist, befindet sich ein Punkt oder Körper in Bewegung, wenn er seine Lage im Raume, seinen Ort nicht beibehält, sondern fortwährend ändert. Da ferner oben nachgewiesen ist, daß sich ein Körper nur dann in Ruhe befindet, wenn alle auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewicht stehen, so folgt hieraus umgekehrt, daß dies bei der Bewegung nicht der Fall sein kann, daß vielmehr, damit die Bewegung erfolgt, eine oder mehrere Kräfte auf den Körper wirken müssen, welche sich nicht das Gleichgewicht halten, d. h. daß eine Kraft vorhanden ist, welche das Übergewicht über die übrigen Kräfte besitzt und den Körper bewegt. Als Ursache jeder Bewegung erkennen wir also eine Kraft, welche auf den Körper nach irgendeiner bestimmten Richtung hin wirkt, ihn also zwingt, sich nach dieser Richtung hin zu bewegen. Da der Körper somit fortgesetzt seinen Ort verändert, legt er einen bestimmten Weg zurück, welcher die Bahn des Körpers genannt wird. Sie ist also die Aufeinanderfolge aller Orte im Raume, welche der Körper nacheinander einnimmt. Diese Aufeinanderfolge ist jedoch nicht nur örtlich, sondern auch zeitlich anzusehen, d. h. der Körper gebraucht eine gewisse Zeit, um seine Bahn zurückzulegen.

Wir beobachten also bei der Bewegung eines Körpers das Wirken einer Kraft auf einem bestimmten Wege in einer bestimmten Zeit.

Diese drei Größen müssen daher in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen, und erstrecken sich die Untersuchungen der Dynamik auf die Ermittelung der Gesetze für diese gegenseitigen Beziehungen.

Das einfachste Beispiel einer Bewegung durch eine äußere Kraft ist der Fall eines Körpers im Raume. Die hierbei wirkende Kraft ist die Anziehungskraft der Erde, die Schwerkraft, die Bahn des

Körpers ist hierbei stets eine lotrechte, d. h. eine zum Erdmittelpunkt gerichtete Gerade.

Verfolgen wir einen solchen frei fallenden Körper, so sehen wir, daß er in gewissen Zeiten stets einen bestimmten Weg zurücklegt, wir sehen aber ferner, daß er anfänglich langsamer fällt als später. Die Beziehung zwischen dem Weg, den er in einer bestimmten Zeit z. B. einer Sekunde zurücklegt, und zu dieser Zeit bezeichnet man als die Geschwindigkeit des Körpers. Wir sehen, daß diese Geschwindigkeit allmählich zunimmt, d. h. daß der Weg des Körpers in der ersten Sekunde oder einem Bruchteil derselben kleiner ist als in der folgenden oder einem folgenden Bruchteil.[1]) Diese Zunahme bezeichnen wir als die Beschleunigung des Körpers[2]) und verstehen darunter also immer eine allmähliche Zunahme der Geschwindigkeit eines Körpers. Das Gegenteil dieser Erscheinung, also eine allmähliche Abnahme der Geschwindigkeit, heißt eine Verzögerung derselben. Beide Begriffe beziehen sich also auf die Geschwindigkeit des Körpers und können daher durch das Verhältnis des Weges und der Zeit bestimmt werden. Tritt weder das eine noch das andere ein, so bewegt sich der Körper gleichförmig, während die Bewegung bei einer Beschleunigung oder Verzögerung als ungleichförmig bezeichnet wird. Je nachdem endlich der Körper sich in gerader Richtung fortbewegt, oder in einer gekrümmten Bahn, unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegungen.

Als Beispiele mögen die folgenden dienen.

Ein Eisenbahnzug auf gerader Strecke bewegt sich gleichförmig in geradliniger Bahn. Beim Einfahren in einen Bahnhof bewegt er sich ungleichförmig, nämlich mit allmählich abnehmender Geschwindigkeit oder verzögerter Bewegung. Ein frei fallender Körper bewegt sich geradlinig, ungleichförmig, weil fortwährend beschleunigt. Eine aus einem Geschütz abgefeuerte Granate bewegt sich ungleichförmig und krummlinig, da die Geschwindigkeit von der Geschützmündung an infolge des Luftwiderstandes und der Anziehung der Erde fortwährend bis zum Aufschlagspunkt abnimmt und krummlinig ebenfalls infolge der Anziehung der Erde in einer flachen Bogenlinie, der sogenannten Flugbahn des Geschosses. Ein um eine Welle umlaufendes Rad, z. B. eine Riemenscheibe bzw. jeder Punkt derselben, bewegt sich gleichförmig, krummlinig.

1) In der höheren Analysis bezeichnet man diese kleinen Änderungen und Zeitteilchen mit „unendlich klein".

2) Akzeleration der Schwerkraft.

Um die Bewegungsvorgänge rechnerisch ausdrücken und spezielle Fälle berechnen zu können, bedarf es jedoch bestimmter Einheiten oder Maße, mit welchen die verschiedenen Größen gemessen werden können.

Als Maßstab der Kräfte dient auch hier, wie bei den Untersuchungen des ersten Teils das Gewicht des Körpers und als Einheit des Gewichtes das Kilogramm. Als Einheit des Weges dient ein Meter, als Einheit der Zeit die Sekunde.

Außer diesen Maßeinheiten ist jedoch für die physikalischen, chemischen und elektrotechnischen Untersuchungen noch ein anderes Maßsystem im Gebrauch, das absolute Maßsystem. Dasselbe unterscheidet sich[1]) von den sonst gebräuchlichen Maßsystemen dadurch, daß es nur für Längen, Zeiten, Massen je eine willkürliche Einheit des Maßes festsetzt und die Maße aller anderen meßbaren Größen so auf diese Grundmaße zurückführt, daß alle Reduktionsfaktoren erspart werden. Das aus den Vorschlägen von Gauß und Weber und der Feststellung durch den Pariser Kongreß vom 21. September 1881 hervorgegangene absolute Maßsystem, das sogenannte Gramm-Zentimeter-Sekunden-System (abgekürzt = G. C. S.), hat als Einheit der Masse das Gramm, d. h. die Masse vom 1 ccm Wasser, als Einheit der Länge das Zentimeter und als Einheit der Zeit die Sekunde. Diese drei sind die fundamentalen Einheiten; alle anderen sind abgeleitete Einheiten und lassen sich in Funktionen von Potenzen der fundamentalen Einheiten ausdrücken. Diese Funktionen heißen ihre Dimensionen und werden durch in eckige Klammern gesetzte Produkte der Potenzen der drei fundamentalen Größen: [L] Länge, [M] Maße, [T] Zeit dargestellt.

Man unterscheidet 1. geometrische, 2. mechanische, 3. kalorische, 4. elektrostatische, 5. magnetische und 6. elektromagnetische Einheiten.

Flächen sind z. B. von der Dimension $[L^2]$, ihre Maßeinheit ist das Quadratzentimeter; Volumina $[L^3]$ haben als Einheit das Kubikzentimeter.

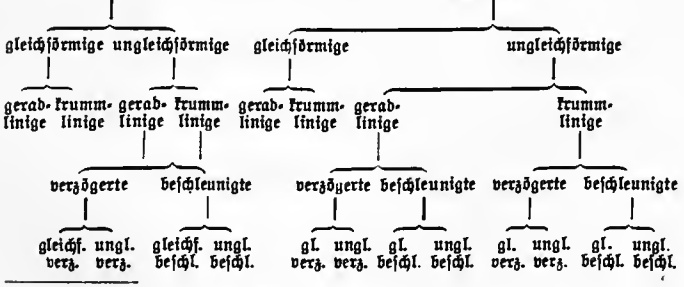
Die mittlere Geschwindigkeit eines Körpers wird gefunden, wenn man seinen Weg [L] durch die Zeit [T] dividiert, in welcher der Weg zurückgelegt wird, die Geschwindigkeit hat daher die Dimension $[LT^{-1}]$; ihre Einheit ist diejenige, bei welcher pro Sekunde 1 cm Weg beschrieben wird. Die gleichmäßige Beschleunigung oder die für die Zeiteinheit berechnete Zunahme der Geschwindig-

1) Näheres s. Lexikon der Gesamten Technik, 2. Aufl. Bd. VI, S. 327.

keit innerhalb einer gemessenen Zeit ist von der Dimension $[LT^{-2}]$. Die Beschleunigung der Schwere[1]) hat am Äquator den Wert $g = 978{,}1$, am Nordpol $g = 983{,}1$ und unter 45° Breite $g = 980{,}6$ cm.

Eine Kraft ist um so größer, je größer die von ihr bewegte Masse und je größer die von ihr bewirkte Beschleunigung ist; sie ist von der Dimension $[MLT^{-2}]$; ihre Einheit, die Dyne, ist der 980,6ste Teil des Gewichts von 1 ccm Wasser, denn die Masse von 1 g erleidet durch die Schwere eine Beschleunigung von 980,6 cm. Man verwechsle also nicht die beiden Bedeutungen: Gramm gleich Einheit der Masse im absoluten Maßsystem und Grammgewicht gleich Einheit einer Kraft im konventionellen Maßsystem im Betrage von 980,6 Dynen. Letztere Größe, das Grammgewicht, ist mit der geographischen Breite und mit der Erhebung über die Meeresoberfläche veränderlich, erstere unveränderlich. Das Gewicht eines Körpers, das an sich eine mit dem Orte veränderliche Kraft ist und bei seiner Ermittelung mittels einer Federwage sich als solches erweist, dient scheinbar als konventionelles Maß für die Masse. In Wirklichkeit vergleicht die Wägung mittels einer Gewichtswage die Massen, weil Ware und Gewichtsstücke ihre Gewichte in gleichem Verhältnis mit dem Orte verändern. Ein Körper hat in der Tat ebensoviel Gramm Masse nach absolutem Maßsystem, als er nach dem konventionellen Gewichtssystem Gramm an Gewicht besitzt.

Für die verschiedenen Arten der Bewegung erhält man nach dem Vorstehenden folgendes Schema:



1) S. weiter oben S. 41.

Man erhält somit sowohl bei der freien als auch bei der gezwungenen Bewegung je 10 verschiedene Bewegungsarten.

Es kann bei dem geringen zur Verfügung stehenden Raume und dem Zwecke dieses Buches, nur einen Überblick über die wichtigsten Gebiete der Mechanik zu geben, nicht die Aufgabe sein, auf alle die verschiedenen Arten und Möglichkeiten der Bewegungen einzugehen, vielmehr können nur die hauptsächlichsten derselben herausgehoben und ihre Anwendungen an Beispielen gezeigt werden.

Zur Vereinfachung der Untersuchungen sollen im ersten Abschnitt zunächst nur die Bewegungsgesetze eines sogenannten materiellen Punktes oder Massenpunktes untersucht, im zweiten Abschnitt diejenigen starrer Körper behandelt werden.

Erster Abschnitt.

Die Bewegung eines materiellen Punktes.

1. Kapitel.

Die freie Bewegung.

A. Allgemeine Betrachtungen.

Die freie Bewegung ist jene Bewegung, bei welcher der Körper sich frei im Raume bewegt, ohne an eine vorgeschriebene, feste Bahn gebunden zu sein.

Je nachdem das Verhältnis zwischen Weg und Zeit oder seine Geschwindigkeit dauernd gleichbleibend oder veränderlich ist, ist seine Bewegung eine gleichförmige oder ungleichförmige. Ist seine Bahn eine Gerade oder eine Kurve, so ist seine Bewegung eine gerad- oder krummlinige.

Bezeichnet s den Weg in bestimmter Zeit, t diese Zeit in Sekunden, c die Geschwindigkeit in m/Sek., so ist $s = c \cdot t$ und $c = \frac{s}{t}$ für die gleichförmige Bewegung.

Es ist also bei dieser die Geschwindigkeit gleichbleibend, unveränderlich oder c = konstant.

1. Beispiel. Ein Fußgänger geht von einer Stadt mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 1,2 m/Sek. fort. Nach einer Zeit von 35 Minuten fährt von demselben Ausgangspunkt ein Einspänner mit einer Geschwindigkeit von 3,6 m/Sek. hinter dem

Fußgänger her. Nach welcher Zeit t_1 und in welcher Entfernung vom Ausgangspunkt trifft der letztere mit ersterem zusammen?

Die Wege beider Bewegenden müssen gleich sein, also $s = s_1$. Nun ist $s = c \cdot t$ und $s_1 = c_1 \cdot t_1$, worin c und t Weg und Zeit des Fußgängers, c_1 und t_1 diejenigen des Wagens bedeuten.

Man erhält die Gleichungen $c \cdot t = c_1 \cdot t_1$ und $t = t_1 \cdot \frac{c_1}{c}$. Ferner ist $t = t_1 + 35 \cdot 60 = t_1 + 2100$ Sek., also auch $t_1 \cdot \frac{c_1}{c} = t_1 + 2100$, woraus, da $\frac{c_1}{c} = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3$ ist, folgt $3\,t_1 - t_1 = 2\,t_1 = 2100$, $t_1 = 1050$ Sek. $= 17$ Min. 30 Sek., ferner $t = 1050 + 2100 = 3150$ Sek. $= 52$ Min. 30 Sek. und $s = s_1 = c \cdot t = 1{,}2 \cdot 3150 = 3780$ m $= 3{,}78$ km.

2. Beispiel. Ein Güterzug fährt von der Station A bis zur Station B mit einer Geschwindigkeit von 30 km/St. 2 Stunden und 42 Minuten mit drei Aufenthalten von 10, 12 und 18 Minuten auf drei Zwischenstationen. Ein Schnellzug soll den Güterzug auf Station B überholen und mit einer Geschwindigkeit von 75 km/St. fahren. Wieviel später als der Güterzug muß er von Station A abfahren? Wie groß ist die Entfernung zwischen den Stationen A und B?

Auch hier ist wieder $s = s_1$ und $s = c \cdot t$ und $s_1 = c_1 \cdot t_1$.

Die ganze Fahrzeit des Güterzuges beträgt 2 Stunden 42 Minuten $= 162$ Minuten. Hiervon gehen $10 + 12 + 18 = 40$ Minuten Aufenthalt ab, so daß die eigentliche Fahrzeit $162 - 40 = 122$ Min. $= 7320$ Sek. beträgt.

Die mittlere Geschwindigkeit des Güterzuges ist 30 km/St. $= 8{,}333$ m/Sek., der zurückgelegte Weg also $8{,}333 \cdot 7320 = 61\,000$ m $= 61$ km.

Für den Schnellzug ist $s_1 = c_1 \cdot t_1$. Dann ist die Geschwindigkeit $c_1 = 75$ km/St. $= 20{,}833$ m/Sek. Da $s_1 = s = 61\,000$ m ist, so folgt $t_1 = \frac{61\,000}{20{,}833} = 2928$ Sek. $= 48$ Min. 48 Sek.

Die Gesamtfahrzeit des Güterzugs betrug 2 Stunden 42 Minuten $= 9720$ Sek., diejenige des Schnellzugs 2928 Sek., also muß letzterer um $9720 - 2928 = 6792$ Sek. $= 1$ Stunde 53 Minuten 12 Sekunden später abfahren als der Güterzug.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht der gebräuchlichen Geschwindigkeiten bei gleichförmiger Bewegung.

	km/St.	m/Sek.
Gewöhnlicher Fußgänger	3,96—4,32	1,1—1,2
Infanterie beim gewöhnlichen Marsch, 112 Schritt in der Minute	5,4	1,5
Fahrrad, normal	15	~4
" äußerst	30	8,33
Pferd am Lastwagen, im Schritt	3,6	1,0
Kavallerie im Schritt	6,0	1,67
" im Trab	14,5	~4
" im Galopp	24	6,67
Die meisten Flüsse		0,65—1,3
Die Donau		1,6 —1,8
Schwacher Wind		1,0
Frischer "		2,0
Starke Brise		10—12
Sturm		25—30
Orkan		40—50
Segelschiff		4,5
Englische Rennpferde		14—25
Windhund		24
Adler		31,4
Brieftaube		20
Bahnzüge, Güter-	30	8,33
" Personen-	45	12,5
" Schnell-	65	18
" Expreß oder Blitz	100	~28
Ozean-Postdampfer, 12 Knoten	21,6	6
1 Knoten = 1 deutsche Seemeile/St.	1,853	0,5144
Ozean-Schnelldampfer, 22 Knoten = 520 Seemeilen = 960 km in 24 Stunden	~40	11,333
Infanteriegewehrkugel an der Mündung		620
10,5 cm-Granate aus Kruppschem Geschoß an der Mündung		933
Schallgeschwindigkeit		333
Erdgeschwindigkeit am Erdäquator		464

Licht und Elektrizität 40 000 Meilen/Sek. = 300 000 km/Sek.

Die ungleichförmige Bewegung ist diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit sich fortwährend ändert, zu- oder abnimmt; im ersteren Falle ist die Bewegung eine beschleunigte, im letzteren Falle eine verzögerte. Ein Beispiel erster Art ist ein aus dem Still-

stand anfahrender Eisenbahnzug, ein solches letzterer Art eine rollende Kugel, welche durch die Reibung auf der Rollbahn und den Luftwiderstand allmählich zur Ruhe gebracht wird.

Nun sind auch hierbei noch zwei Möglichkeiten, indem die Beschleunigung oder Verzögerung eine gleichmäßige oder ungleichmäßige sein kann. Die erste findet statt, wenn in gleichen Zeiten die Geschwindigkeit um den gleichen Betrag zu- oder abnimmt, die letztere, wenn dieser Betrag veränderlich ist, d. h. größer oder kleiner wird.

Man nennt also die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit (Sek.) die Beschleunigung oder Verzögerung und bezeichnet dieselbe mit p. Sie ist bei gleichmäßigen Änderungen ausgedrückt durch die Beziehung

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

oder allgemein $p = \frac{v}{t}$,

also: Quotient aus der Geschwindigkeitsänderung durch die Zeitänderung. Die Geschwindigkeit berechnet sich daraus zu $v = v_0 + p \cdot t$, worin v_0 die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ oder zu Anfang der Bewegung bedeutet.

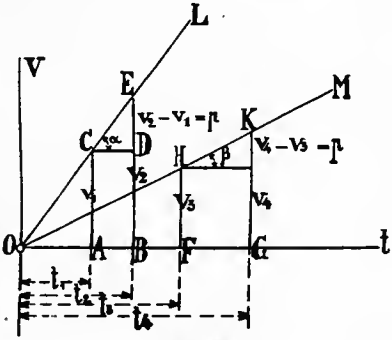


Fig. 46.

Ist diese Geschwindigkeit zu Anfang gleich Null, so ist einfach $v = p \cdot t$.

Man kann diese Geschwindigkeitsänderung auch bildlich darstellen. In Fig. 46 ist O der Koordinatenanfangspunkt und sind auf der horizontalen Achse die Zeiten, auf der lotrechten die Geschwindigkeiten aufgetragen.

Die Linie OL stellt die Beschleunigung dar, für welche $p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ und $v_2 - v_1 = p \cdot (t_2 - t_1)$, also $v_2 = v_1 + p(t_2 - t_1)$ ist, Linie OM diejenige, für welche $p = \frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$ und $v_4 - v_3 = p(t_4 - t_3)$, $v_4 = v_3 + p(t_4 - t_3)$ ist.

Der Weg s war bei gleichförmiger Geschwindigkeit das Produkt aus der Geschwindigkeit und der Zeit, er ist also durch eine Fläche dargestellt, deren Höhe die Geschwindigkeit c und deren Basis

die Zeit $(t_2 - t_1)$ ist. Im vorliegenden Falle ist der Weg s durch die Flächen OAC bzw. OBE, OFH bzw. OGK, also eine Dreiecksfläche, dargestellt, da die Geschwindigkeit proportional auf der Linie OL bzw. OM zunimmt. Oder allgemein $s = \frac{v}{2} \cdot t$, worin v die augenblickliche Geschwindigkeit und s den in der Zeit t zurückgelegten Weg bedeutet.

Da nun nach dem Früheren $v = p \cdot t$ ist, so folgt auch

$$s = \frac{1}{2} \cdot pt \cdot t = \frac{p}{2} \cdot t^2 = \frac{p \cdot t^2}{2}$$

und, da $t = \frac{v}{p}$ ist, auch

$$s = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{p} = \frac{v^2}{2p}.$$

Für die Zeit $t_2 - t_1$ ist der Weg durch die Fläche ABEC, also $\triangle$ CDE + $\square$ ABCD dargestellt, also

$$s_1 = \frac{v_2 - v_1}{2} (t_2 - t_1) + v_1 \cdot (t_2 - t_1).$$

Nun ist aber nach dem Obigen $v_2 - v_1 = p \cdot (t_2 - t_1)$, also

$$s_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{p}{2} \cdot (t_2 - t_1)^2.$$

Denkt man sich die Fläche ABCE nach oben verdoppelt, so ist die Höhe $v_2 + v_1$, die Basis $t_2 - t_1$, also auch

$$2\, s_1 = (v_2 + v_1) \cdot (t_2 - t_1) \text{ oder}$$

$$s_1 = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

oder, da $t_2 - t_1 = \frac{v_2 - v_1}{p}$ ist,

$$s_1 = \frac{1}{2p} (v_2 + v_1)(v_2 - v_1) = \frac{1}{2p} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2p}.$$

Die letzte Formel ist sehr wichtig und wird weiter unten noch auf dieselbe mehrfach zurückzukommen sein.

Genau dieselben Gleichungen gelten nun auch für die andere Beschleunigungsart, die durch die Linie OM dargestellt ist, also

$$s_2 = v_3(t_4 - t_3) + \frac{p}{2} (t_4 - t_3)^2 \text{ und}$$

$$s_2 = \frac{1}{2p} (v_4^2 - v_3^2) = \frac{v_4^2 - v_3^2}{2p}.$$

Ganz allgemein also gilt für einen beliebigen Weg $s = \frac{v_e^2 - v_a^2}{2p}$, worin v_a, und v_e die Anfangs- und Endgeschwindigkeit beim Durch-

laufen dieses Weges und p die konstante Beschleunigung (oder Verzögerung) ist. Im letzteren Falle ist p negativ in die Formeln einzusetzen.

Ebenso ist allgemein $s = v_a (t_e - t_a) + \frac{p}{2}(t_e - t_a)^2$, worin t_a und t_e die Anfangs- und Endzeiten sind, also $t_e - t_a$ die zum Zurücklegen des Weges s verbrauchte Zeit ist.

1. Beispiel. Ein Eisenbahnzug soll durch die Zugkraft der Maschine beim Anfahren eine konstante Beschleunigung von $p = 0{,}6$ m/Sek. erhalten. In welcher Zeit wird er die Geschwindigkeit von 30 km/St. $= 8{,}33$ m/Sek. erhalten und welchen Weg hat er bis zum Erreichen dieser Geschwindigkeit zurückgelegt?

Da $t_1 = 0$ und $v_1 = 0$ ist, so gehen die obigen Gleichungen über in die folgenden

$$t_2 = \frac{v}{p} \text{ und } s = \frac{p}{2} \cdot t_2^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $t_2 = \frac{8{,}33}{0{,}6} = 13{,}9$ Sek., aus der zweiten $s = \frac{0{,}6}{2} \cdot 13{,}9^2 = 57{,}96$ m.

2. Beispiel. Ein in voller Fahrt befindlicher Schnellzug von 75 km/St. $= 20{,}833$ m/Sek. Geschwindigkeit soll so stark gebremst werden, daß er nach 10 Sekunden zum Stillstand kommt. Wie groß muß die Verzögerung in der Sekunde sein und welchen Weg legt er in der Zeit von 10 Sekunden noch zurück?

Aus der Gleichung $t = \frac{v}{p}$ folgt $p = \frac{v}{t}$, also $= \frac{20{,}833}{10} = 2{,}083$ m/Sek. Aus der zweiten Gleichung $s = \frac{p}{2} \cdot t^2$ folgt

$$s = \frac{2{,}083}{2} \cdot 10^2 = \frac{208{,}3}{2} = 104{,}15 \text{ m}.$$

3. Beispiel. Ein Schnellzug von 90 km/St. Geschwindigkeit gebraucht zum Anfahren bis zur vollen Geschwindigkeit 25 Sek., zum Bremsen aus der vollen Fahrt in Stillstand 15 Sek. Er hat unterwegs auf neun Stationen folgenden Aufenthalt: auf einer einen solchen von 20 Minuten, auf zweien von 10 Minuten und auf sechs von je 1 Minute Aufenthalt. Der Zug hat Fahrzeit von morgens 8^{30} bis abends 6^{10}. Wie groß ist die von ihm zurückgelegte Gesamtstrecke?

Da er neun Stationen passiert, so sind zwischen der Anfangs- und Endstation zehn Fahrstrecken vorhanden. Es sind zunächst die

Wege und Fahrzeiten bei gleichförmig beschleunigtem Anfahren und gleichförmig verzögertem Einfahren in die Stationen zu berechnen.

Die Geschwindigkeit von 90 km/St. ist gleich 25 m/Sek.

Die Beschleunigung p ist $= \frac{v}{t} = \frac{25}{25} = 1$ m/Sek., der bis zur Erreichung der vollen Geschwindigkeit jedesmal zurückgelegte Weg $s = \frac{p}{2} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 25^2 = \frac{625}{2} = 312{,}5$ m.

Beim Einfahren ist die Verzögerung $p' = \frac{v}{t} = \frac{25}{15} = 1{,}667$ m/Sek. Der jedesmal bis zum Stillstand hierbei zurückgelegte Weg ist

$$s = \frac{p}{2} t^2 = \frac{1{,}667}{2} \cdot 15^2 = 187{,}483 \text{ m}.$$

Die gesamte bei zehnmaligem An- und Einfahren zurückgelegte Strecke ist somit

$$s_1 = (312{,}5 + 187{,}483) \cdot 10 \sim 5000 \text{ m} = 5 \text{ km},$$

die hierzu verbrauchte Zeit

$$t_1 = (25 + 15) \cdot 10 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ Sek.} = 6 \text{ Min. } 40 \text{ Sek.}$$

Die gesamte Fahrzeit von morgens 8^{30} bis abends 6^{10} beträgt 9 Stunden 40 Minuten. Die Aufenthalte betragen zusammen

$$\begin{aligned} 1 \cdot 20 &= 20 \\ 2 \cdot 10 &= 20 \\ 6 \cdot \ 1 &= \ 6 \\ \hline & 46 \text{ Minuten}. \end{aligned}$$

Von der Gesamtzeit von 9 Stunden 40 Minuten gehen also $46 + 6' 40'' = 52' 40''$ ab, so daß für die eigentliche Fahrzeit übrig bleibt:

$$(9 \cdot 3600 + 40 \cdot 60) - (52 \cdot 60 + 40) = 34\,800 - 3160 = 31\,640 \text{ Sek.}$$

Die Geschwindigkeit pro Sekunde ist 25 m/Sek., mithin legt der Zug $\frac{31\,640 \cdot 25}{1000} = 791$ km mit der vollen Fahrgeschwindigkeit zurück. Hierzu kommen noch 5 km während des Anfahrens und Einlaufens, so daß die ganze Entfernung von der Anfangs- bis zur Endstation 796 km beträgt. —

Zeichnet man in Fig. 46, indem man die Linie CD//AB und HJ//FG zieht, die rechtwinkligen Dreiecke CDE und HJK, so stellt die Höhe DE bzw. JK oder $v_2 - v_1$ und $v_4 - v_3$ die jedesmalige Geschwindigkeitszunahme dar.

Das Verhältnis dieser Zunahme zur Zeiteinheit, also $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$, ist aber die Beschleunigung. Im rechtwinkligen Dreieck ist aber $\frac{ED}{CD} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = p = \operatorname{tg} \alpha$ und ebenso im Dreieck HJK:

$$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3} = p = \operatorname{tg} \beta.$$

Es ist also die Beschleunigung dargestellt durch die trigonometrische Funktion der Tangente in dem betreffenden Punkte des Diagramms. Diese Betrachtung ist wichtig für die Darstellung der ungleichförmig beschleunigten Bewegung.

Dieselbe ist in Fig. 47 in zwei Formen dargestellt. Bei der durch Linie BB_1B_2 dargestellten Beschleunigungsänderung nimmt dieselbe stets zu. Denkt man sich, daß die Bewegung im Punkte B momentan mit gleichförmiger Beschleunigung weiterginge, so würde sie durch eine Tangente an die Kurve BB_1 im Punkt B dargestellt werden. Dann wäre $p = \operatorname{tg} \alpha = CD : DB = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. Dasselbe gilt für den Punkt B_1, dort ist $p = \operatorname{tg} \alpha_1 = C_1D_1 : D_1B_1 = \frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$.

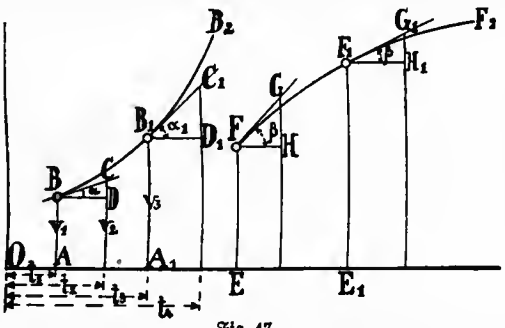


Fig. 47.

Nähme man nun die Entfernung zwischen B und B_1 sehr klein an, so könnte man ferner annehmen, daß $v_2 - v_1 = v_4 - v_3$ wäre, und ebenso $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ wäre, d. h. $p = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v'}{t'}$, worin v' und t' die als sehr klein gedachten Änderungen oder Zunahmen der Geschwindigkeit und Zeit bezeichnen sollen.

Man erhält dann also wieder wie bei der gleichförmigen Bewegung die Gleichung $p = \frac{v}{t}$, worin jedoch v die mittlere Geschwindigkeitsänderung zu Anfang und zu Ende ist. Es würde jedoch hier zu weit führen, auf die analytische Ableitung dieser Gleichung und der übrigen auf die ungleichförmig veränderte Bewegung bezüglichen Gleichungen einzugehen.

B. Der freie Fall.

Die wichtigste Anwendung finden die vorstehend abgeleiteten Gesetze über die gleichförmig veränderte Bewegung auf die Lehre vom freien Fall. Da ein frei fallender Körper nur der Schwerkraft unterworfen ist, also einer fortwährend mit gleicher Stärke wirkenden Kraft, so wird die demselben erteilte Beschleunigung eine gleichförmige sein, es wird in der Zeiteinheit stets dieselbe Vermehrung der Geschwindigkeit erfolgen. Diese Vermehrung oder Beschleunigung ist die Beschleunigung der Schwerkraft und hat an derselben Stelle der Erdoberfläche für alle Körper den gleichen Wert:

$$g = 9{,}81 \text{ m/Sek.}$$

Unter 45° Breite und an der Meeresoberfläche beträgt sie 9,808 m.

Wie oben entwickelt wurde, war

$$v = p \cdot t = g \cdot t,$$

weil die Beschleunigung $p = g$ ist, und

$$s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2g}.$$

Man nennt nun den Weg s, die Fallhöhe h, so daß auch $h = \frac{v^2}{2g}$, $v = \sqrt{2gh}$ und $t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ist, also hieraus

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Für $t = 1$ ist also $v = g = 9{,}81$ m, d. h. nach einer Sekunde ist die Geschwindigkeit = 9,81 m/Sek.

Der zurückgelegte Weg oder die Fallhöhe h ist in 1 Sekunde dann

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{g^2}{2g} = \frac{g}{2} = \frac{9{,}81 \text{ m}}{2} = 4{,}905 \text{ m}.$$

Rechnet man die Werte für einige Sekunden aus, so erhält man die Werte:

Nach Verlauf von Sekunden	ist die Endgeschwindigkeit	· und die gesamte Fallhöhe
1	$g = 9{,}81$ m	$\frac{g}{2} = 0{,}5\,g = 4{,}905$ m
2	$2g = 19{,}62$ m	$4 \cdot 0{,}5\,g = 19{,}62$ m
3	$3g = 29{,}43$ m	$9 \cdot 0{,}5\,g = 44{,}15$ m
4	$4g = 39{,}24$ m	$16 \cdot 0{,}5\,g = 78{,}48$ m
5	$5g = 49{,}05$ m	$25 \cdot 0{,}5\,g = 122{,}63$ m
⋮		
10	$10g = 98{,}10$ m	$100 \cdot 0{,}5\,g = 490{,}50$ m
⋮		
t	$t \cdot g = t \cdot 9{,}81$ m	$t^2 \cdot \frac{g}{2} = t^2 \cdot 4{,}905$ m

Die folgende Tabelle gibt links die Geschwindigkeitshöhen für bestimmte Endgeschwindigkeiten und rechts die Endgeschwindigkeiten für bestimmte Fallhöhen in Metern an:

v	h	h	v
1	0,0509	1	4,429
5	1,274	5	9,905
10	5,097	10	14,007
25	31,86	25	22,147
50	127,42	50	31,32
75	286,69	75	38,36
100	509,68	100	44,29
500	12 724,1	500	99,05
1000	50 968,4	1000	140,07

1. Beispiel. Ein Körper fällt aus einem Luftballon zur Erde und braucht bis zum Aufschlagen auf die Erdoberfläche genau 5 Sekunden. Wie hoch war der Luftballon über der Erde und wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Körpers beim Aufschlagen?

Da $h = \frac{v^2}{2g}$ und $v = g\,t$ ist, so folgt hieraus

$$h = \frac{g^2 \cdot t^2}{2g} = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{9{,}81}{2} \cdot 5^2 = 122{,}63 \text{ m}.$$

Ferner ist $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 122{,}63} = 49{,}0$ m/Sek.

2. Beispiel. Auf der sächsischen Festung Königstein an der Elbe befindet sich ein tiefer, in den Felsen gearbeiteter Brunnen. Läßt man von oben einen Stein in denselben hineinfallen, so schlägt derselbe nach 6,6 Sekunden auf die Wasseroberfläche auf. Wie tief ist der Brunnen?

Aus der Gleichung $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$ folgt

$$h = \frac{9{,}81 \cdot 6{,}6^2}{2} = 4{,}905 \cdot 43{,}56 = 215{,}66 \text{ m}.$$

3. Beispiel[1]). In Schweden gibt es eine Höhle, aus der das Aufschlagen eines von oben frei herabfallenden Steines erst nach 25 Sekunden gehört wird. Die Tiefe der Höhle ist zu berechnen.

Man erhält aus der Gleichung $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 25^2 = 3066 \text{ m},$$

1) Nach Stephan, Die technische Mechanik. Leipzig, B. G. Teubner. 1904, S. 229.

jedoch ist dabei nicht berücksichtigt, daß der Schall eine gewisse Zeit braucht, um den Weg nach oben zurückzulegen. Die Zeit t zerfällt also in zwei Teile, in die Fallzeit t_1 und die Zeit t_2, die der Schall braucht, um heraufzukommen.

Man erhält so die drei Gleichungen

$$t = t_1 + t_2, \quad h = \frac{g}{2} \cdot t_1^2 \,(g = 9{,}81 \text{ m/Sek.}) \quad \text{und}$$

$$h = v \cdot t_2 \,(v = 332 \text{ m/Sek.}).$$

Wird t_1 und t_2 aus den beiden unteren Gleichungen in die erste eingesetzt, so ist

$$\sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{h}{v} = t,$$

woraus sich nach Quadrierung und Auflösung der entstehenden quadratischen Gleichung ergibt

$$h = v \cdot t + \frac{v^2}{2g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \cdot t g}{v}}\right).$$

Nach Einsetzung der Zahlen wird

$$h = 8300 - 6433 = 1867 \text{ m}.$$

4. Beispiel[1]). Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 40$ m/Sek. senkrecht nach aufwärts geworfen. Zu berechnen ist die Steighöhe, die Zeit, nach der er wieder unten ankommt, und die dabei erreichte Geschwindigkeit.

Der Körper erhält die Verzögerung $g = -9{,}81$ m/Sek. und steigt, bis sich die Geschwindigkeit auf Null verringert hat; daraus ermittelt sich

$$s = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} = \frac{0 - 40^2}{2(-9{,}81)} \sim 81{,}6 \text{ m}.$$

Die Steigdauer ist nach Gleichung

$$t' = \frac{v_2 - v_1}{g} = \frac{0 - 40}{-9{,}81} \sim 4{,}1 \text{ Sek.}$$

Von jetzt ab wird der Körper — beim Niederfallen zur Erde — positiv beschleunigt mit $g = +9{,}81$ m/Sek. Die Endgeschwindigkeit ermittelt sich aus der oben berechneten Steighöhe

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} : \frac{v_2^2 - 0}{2 \cdot 9{,}81} = 81{,}6 \text{ m};$$

1) S. ebenda S. 231.

daraus folgt ohne weiteres, daß $v_2 = 40$ m/Sek. ist, d. h. die Endgeschwindigkeit beim Herunterfallen ist dieselbe wie die Wurfgeschwindigkeit. Die Fallzeit wird ebenfalls

$$t' = \frac{v_2 - v_1}{g} = \frac{40 - 0}{9{,}81} \sim 4{,}1 \text{ Sek.}$$

also ebenso groß wie die Steigdauer.

C. Die Wurfbewegung.

Man bezeichnet hiermit diejenige Bewegung, welche ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit horizontal oder unter einem Winkel nach aufwärts bewegter, geworfener oder geschossener Körper unter der Einwirkung der Schwerkraft ausführt. Die hierbei

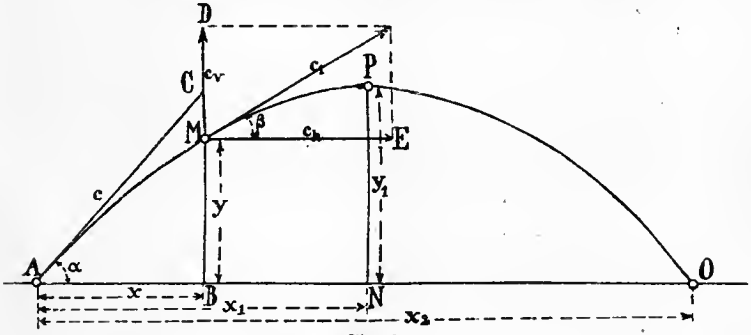


Fig. 48.

beschriebene Bahn heißt die Wurflinie oder Flugbahn (bei geschossenen Körpern). Die größte Höhe, welche der Körper hierbei über der Horizontalen erreicht, heißt die Steighöhe, die größte horizontale Entfernung, welche er beim Niederfallen erreicht, die Wurfweite oder Flugweite, die Zeit, welche er bis zum Niederfallen braucht, die Flugzeit.

In Fig. 48 ist die Wurflinie AMO dargestellt. Zur Berechnung der einzelnen Größen dienen folgende Gleichungen.

Im Punkte M der Bahn, dessen Koordinaten $AB = x$ und $BM = y$ sind, hat derselbe die Geschwindigkeit c_1, welche sich in eine horizontale Komponente $ME = c_h$ und $MD = c_v$ zerlegen läßt.

Für x und y erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC folgende Werte. Es ist

$$\frac{AB}{AC} = \cos\alpha, \text{ also } AB = x = AC \cdot \cos\alpha = c.t.\cos\alpha, \text{ also } t = \frac{x}{c \cdot \cos\alpha},$$

da der Weg AC bei gleichförmiger Bewegung nach t Sekunden $= c \cdot t$ ist, worin c die gleichförmige Geschwindigkeit in der Richtung des Schenkels AC bezeichnet. Es ist ferner

$$\frac{BC}{AC} = \sin\alpha, \quad \text{also} \quad BC = t \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Nun ist $BC = MB + MC$. Dann ist MC der Weg, welchen der Körper infolge der Beschleunigung der Schwerkraft nach abwärts zurücklegt. Denn wäre dieselbe nicht vorhanden, so flöge er bis zum Punkte C auf der Geraden AC. Man kann auch annehmen, daß der Körper zunächst mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Zeit t bis zum Punkte C flöge und dann mit der Beschleunigung g durch die Schwerkraft in der Zeit t lotrecht nach unten bewegt würde, worauf er auch im Punkt M ankommen würde.

Es ist also

$$MB = y = BC - MC \quad \text{oder} \quad y = t \cdot c \cdot \sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2},$$

worin das letzte Glied auf der rechten Seite der Gleichung der Weg beim freien Fall in der Zeit t ist.

Im Punkte M denkt man sich die Geschwindigkeit c horizontal und vertikal zerlegt. Dann ist

$$c_h = c \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad c_v = c \cdot \sin\alpha - gt,$$

worin das letzte Glied die Beschleunigung in lotrechter Richtung nach abwärts in der Zeit t ist.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, da

$$c_1^2 = c_v^2 + c_h^2 \quad \text{und} \quad c_1 = \sqrt{c_v^2 + c_h^2}$$

ist, wenn man die obigen Werte einsetzt,

$$c_1 = \sqrt{c^2 - 2\,gt \cdot c\,\sin\alpha + g^2 t^2},$$

die Geschwindigkeit in der Wurflinie nach der Zeit t.

Setzt man in der obigen Gleichung von y den Wert $\frac{x}{c\cos\alpha}$ für t ein, so erhält man die Hauptgleichung für die Flugbahn

$$y = \frac{x}{c\cdot\cos\alpha} \cdot c \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{c\cdot\cos\alpha}\right)^2 = x \cdot \frac{c\cdot\sin\alpha}{c\cdot\cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{c\cdot\cos\alpha}\right)^2$$

$$= x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2\cdot\cos^2\alpha}.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel.

Dieselbe ermöglicht die verschiedenen, charakteristischen Punkte der Flugbahn zu bestimmen.

Der höchste Punkt oder Scheitelpunkt P der Wurflinie hat die Koordinate x_1 und y_1. Bezeichnet man noch den Winkel zwischen c_1 und c_h mit β, so ist für denselben $\frac{c_v}{c_1} = \sin\beta$.

Im Punkte P fällt aber c_1 mit c_h zusammen, es ist also $\beta = 0$ und $\sin\beta$ auch $= 0$.

Daher ist $\frac{c_v}{c_1} = \frac{c_{\sin\alpha} - gt}{\sqrt{c^2 - 2gt \cdot c \cdot \sin\alpha + g^2t^2}}$ auch $= 0$.

Dies ist der Fall, wenn der Zähler $= 0$ ist, also $c \cdot \sin\alpha = gt$ ist, oder

$$g \cdot t = c \sin\alpha, \quad t = \frac{c}{g} \cdot \sin\alpha.$$

Nun ist aber $x = t \cdot c \cdot \cos\alpha$, also $x_1 = t_1 \cdot c \cdot \cos\alpha$, also $t_1 = \frac{x_1}{c \cdot \cos\alpha}$, mithin

$$\frac{x_1}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{c}{g} \cdot \sin\alpha, \quad \text{also} \quad x_1 = \frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Dies ist der Horizontalabstand AN des Scheitelpunktes P vom Anfangspunkt A.

Die zugehörige Scheitelhöhe $PN = y_1$ erhält man aus der Gleichung

$$y_1 = x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x_1^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

wenn man hierein den Wert von x_1 einsetzt.

Man erhält dann

$$y_1 = \frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 \cdot c^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \frac{c^4}{g^2} \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

und daraus

$$y_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha.$$

Dieser Wert von y_1 ist am größten, wenn $\sin\alpha = 1$ oder $\alpha = 90^0$ ist, dann ist $y_1 = \frac{c^2}{2g}$ und $x_1 = \frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$, weil $\cos 90^0 = 0$ ist. Dies ist der Fall beim **senkrechten Wurf** nach oben.

Um nun den Wert x_2 zu bestimmen, für welchen die Wurflinie die Horizontale wieder berührt, ist in der Gleichung

$$y_2 = x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x_2^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

$y_2 = 0$ zu setzen, also

$$x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2}\frac{x_2^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha} = 0, \text{ dann ist}$$

$$x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{2}\frac{x_2^2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{g}{2} \cdot \frac{x_2}{c^2 \cdot \cos^2\alpha}, \text{ also}$$

$$x_2 = \frac{2}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot c^2 \cdot \cos^2\alpha = \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c^2}{g} \cdot \sin(2\alpha).$$

Dieser Wert wird am größten, wenn $\sin(2\alpha)$ am größten ist, also $\sin 2\alpha = 1$, also $2\alpha = 90^0$ und $\alpha = 45^0$, nämlich $x_2 = \frac{c^2}{g}$.

Die Wurfhöhe y_1 ist dann

$$= \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{c^2}{2g} \cdot 0{,}707^2 = \frac{c^2}{2g} \cdot 0{,}5 = \frac{c^2}{4 \cdot g},$$

und der zugehörige Wert von

$$x_1 = \frac{c^2}{g}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c^2}{g} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist dann für diesen Spezialfall

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \text{ und } y_1 = \frac{x_2}{4} = \frac{x_1}{2}.$$

1. Beispiel. Ein Tennisball werde unter einem Winkel von 35° in die Höhe geworfen. Die Geschwindigkeit c betrage 10 m/Sek. Wie weit und wie hoch fliegt der Ball und nach welcher Zeit fällt er zur Erde?

Zunächst ist

$$x_2 = \frac{c^2}{g} \cdot \sin(2\alpha) = \frac{10^2}{9{,}81} \cdot \sin 70^0 = \frac{100}{9{,}81} \cdot 0{,}9397 = \frac{93{,}97}{9{,}81} = 9{,}57\text{ m}.$$

Die Wurfhöhe ist

$$y_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha = \frac{100}{19{,}6_2} \cdot 0{,}574^2 = 5{,}097 \cdot 0{,}33 = 1{,}682\text{ m}.$$

Um die Zeit t_2 zu bestimmen, für welche $y = 0$ ist, hat man zunächst in die Gleichung

$$y = c \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2}$$

$y = 0$ zu setzen, dann ist

$$c \cdot t \cdot \sin\alpha = \frac{g \cdot t^2}{2}, \text{ oder } t = \frac{2 \cdot c \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0{,}574}{9{,}81}$$

oder

$$t = 1{,}17 \text{ Sek.}$$

2. Beispiel. Ein Wasserstrahl fließt aus einer horizontalen Röhre im Bogen aus. Die Mündung liegt 1,8 m über dem Erd-

boden, der Wasserstrahl trifft in einer Entfernung von 4,2 m den letzteren. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers?

Die Bahn des Wasserstrahls ist (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) durch die rechte Hälfte der Parabel in Fig. 48, also die Kurve P O, dargestellt.

Die Höhe der Mitte der Mündung des Rohres über dem Erdboden ist y_1, die Entfernung von y_1 bis zum Berührungspunkt des Wasserstrahles mit dem Erdboden, O, also NO ist dann x_1.

Aus den Gleichungen für y_1 und x_1, nämlich

$$y_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha \text{ und } x_1 = \frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

ist zunächst der Winkel α zu berechnen.

Es ist nun

$$y_1 = \left(\frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{2}, \text{ also } \frac{c^2}{g} \cdot \sin\alpha = \frac{2y_1}{\sin\alpha}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für x_1 ein, so folgt:

$$x_1 = \frac{2 \cdot y_1}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha, \text{ oder } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2y_1}{x_1} = \frac{2 \cdot 1{,}8}{4{,}2} = 0{,}8571,$$

daher $\alpha = 40^0 35'$ und $\sin\alpha = 0{,}65$.

Nach der Gleichung für y_1 ist $c^2 = \frac{2g \cdot y_1}{\sin^2\alpha}$, also

$$c = \frac{\sqrt{2g \cdot y_1}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}8}}{0{,}65} = 9{,}14 \text{ m/Sek.}$$

Wollte man noch berechnen, wie groß die Entfernung x_1 und der Winkel α bei einer Ausflußgeschwindigkeit von 15 m wäre, so wäre zunächst aus der Gleichung $y_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2\alpha$ die Gleichung $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2g \cdot y_1}}{c}$ abzuleiten, woraus nach Einsetzung der Werte folgt: $\sin\alpha = 0{,}396$, also $\alpha = 23^0 20'$. Aus der weiteren Gleichung $x_1 = \frac{2y_1}{tg\,\alpha}$ folgt dann, da $\operatorname{tg} 23^0 20' = 0{,}431$ ist,

$$x_1 = \frac{2 \cdot 1{,}8}{0{,}431} = 8{,}35 \text{ m}.$$

3. Beispiel[1]). Eine Kanone wird auf die Spitze eines Turmes gerichtet, der Schuß trifft den Turm in der Horizontalebene durch die Kanone in $t_1 = 10{,}2$ Sek. Ein zweiter Schuß mit dem doppelten Steigungswinkel trifft die Spitze des Turmes in $t_2 = 10{,}6$ Sek. Die Entfernung des Turmes ist daraus zu berechnen.

1) Nach Stephan a. a. O. S. 269.

Für den ersten Schuß folgt aus den obigen Gleichungen:

$$x_2 = s = c \cdot \cos\alpha \cdot t_1 \quad \text{und} \quad y_2 = 0 = c \cdot \sin\alpha\, t_1 - \tfrac{1}{2} g \cdot t_1^2$$

oder

$$\tfrac{1}{2} g \cdot t_1^2 = c \cdot \sin\alpha\, t_1.$$

Durch Division beider Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot t_1^2}{s}.$$

Für den zweiten Schuß gilt

$$x_2 = s = c \cdot \cos 2\alpha \cdot t_2 \quad \text{und}$$
$$y_2 = s \cdot \operatorname{tg}\alpha = c \cdot \sin 2\alpha\, t_2 - \tfrac{1}{2} g \cdot t_2^2.$$

Dies ergibt, in derselben Weise dividiert

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot t_2^2}{s} \quad \text{oder} \quad \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot t_2^2}{s}.$$

Wird hierin nach dem Obigen gesetzt $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot t_1^2}{s}$, so folgt nach einigen Umformungen

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \cdot \sqrt{\frac{t_2^2 + t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 10{,}2^2 \sqrt{\frac{10{,}6^2 + 10{,}2^2}{10{,}6^2 - 10{,}2^2}}$$
$$= \sim 8060 \text{ m}.$$

4. Beispiel. In einem Berliner Zirkus war vor etlichen Jahren ein Radfahrer zu sehen, welcher auf einem hohen Gerüste auf einer hölzernen Bahn herunterfuhr und am Ende derselben eine Strecke weit im Bogen frei durch die Luft fuhr und in einer seitlich befindlichen Öffnung verschwand. Die freie Flugbahn ist in Fig. 49

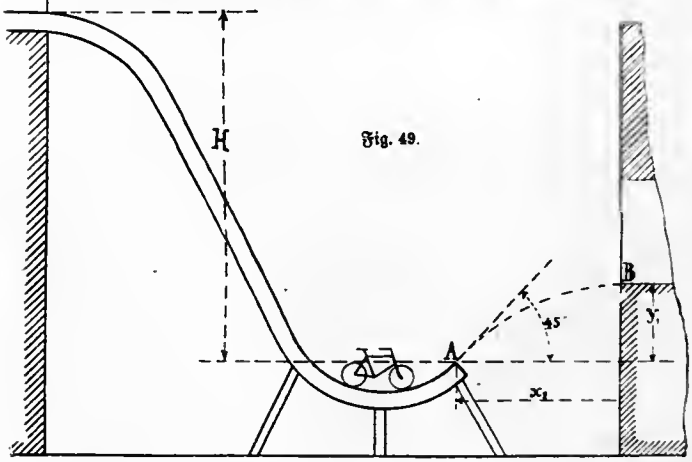


Fig. 49.

mit AB bezeichnet. Der Winkel α, unter welchem das letzte Ende der Bahn gegen die Horizontale geneigt war, betrug 45°, weil bei diesem die Flugweite bei gegebener Geschwindigkeit am größten ist.

Die Höhe y_1 des Punktes B über dem Ausgangspunkt der Flugbahn betrug 4 m. Es soll berechnet werden, mit welcher Geschwindigkeit der Fahrer durch den Punkt A fahren mußte, und wie groß der horizontale Abstand x_1 des Punktes A von der Seitenmauer gemacht werden mußte.

Für den Winkel $\alpha = 45°$ war nach den früheren Gleichungen

$$y_1 = \frac{c^2}{4g} = 4 \text{ m} \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{c^2}{2g} = 2 \cdot y_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$c = \sqrt{4 g y_1} = \sqrt{4 \cdot 9{,}81 \cdot 4} = 12{,}53 \text{ m/Sek}.$$

Die entsprechende Fallhöhe H (ohne Berücksichtigung der Reibungen und des Luftwiderstandes) vom Punkte A bis zum Anfangspunkt der Bahn gemessen, berechnet sich nach der oben (Seite 62) angegebenen Gleichung zu

$$H = \frac{c^2}{2g} = \frac{12{,}53^2}{19{,}62} \sim 8 \text{ m}.$$

In Wirklichkeit war die Höhe jedoch mit Rücksicht auf die Eigenreibungen des Rades, die Reibungen auf der Fahrbahn und den Luftwiderstand wesentlich höher und betrug etwa 16—20 m.

2. Kapitel.

Die gezwungene Bewegung.

A. Allgemeine Betrachtungen.

Weitaus häufiger ist in der Physik und Technik der Fall, daß ein Körper durch eine bestimmte Bahn gezwungen ist, eine genau vorgeschriebene Bewegung auszuführen. Hierbei führt derselbe meistens eine *periodische Bewegung* aus, d. h. derselbe kehrt nach bestimmter Zeit wieder an den Ausgangspunkt seiner Bahn zurück.

Die wichtigsten Beispiele der Bewegungen dieser Art sind die Bewegungen der Himmelskörper. Wie uns die Beobachtungen dieser Körper gelehrt haben, laufen die Tausende und Abertausende derselben in streng vorgeschriebenen Bahnen, welche sie in bestimmten Perioden oder Umlaufszeiten beschreiben. So beschreibt

bekanntlich die Erde ihre Bahn um die Sonne in 365,26 Tagen oder einem Jahre, und beruht umgekehrt auf dieser Bewegung der Erde um die Sonne unsere Zeitrechnung. Ihre Bahn, sowie die Bahn aller übrigen Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Die Umlaufszeiten derselben um die Sonne sind sehr verschieden, so z. B. beim Merkur nur 87,97 Erdentage, beim Mars 686,98 Erdentage, beim Jupiter 4332,54 Tage oder ~ 11 Jahre, 10 Monate, beim Neptun 60 125 Tage oder ~ 164 Jahre 8 Monate. Ähnlich verhält es sich mit den meisten der bekannten Kometen, welche ebenfalls elliptische Bahnen haben, in welchen sie sich um die Sonne bewegen. Ihre Umlaufszeiten sind sehr verschieden. So ist dieselbe für den Halleyschen Kometen zu 76 Jahren, für den Bielaschen zu nur 3,29 Jahren berechnet worden, während es auch Kometen mit geschlossenen (elliptischen) Bahnen gibt, deren Umlaufszeit, wie z. B. beim Donatischen Kometen vom Jahre 1858 Tausende von Jahren beträgt.

Es ist klar, daß diese Bewegungen in den vorgeschriebenen Bahnen bedingt sind durch das Zusammenwirken der Anziehungskraft der Sonne und der sonstigen auf die Himmelskörper wirkenden Kräfte.

Weitere Beispiele der gezwungenen Bewegungen sind u. a. die Bewegungen auf kreisförmiger Bahn um einen festen Mittelpunkt, die Oszillations- oder Schwingungsbewegung, die Bewegung auf der geneigten oder schiefen Ebene, die Bewegungen der Mechanismen und Maschinen, von welchen einige der wichtigsten im folgenden behandelt werden sollen.

B. Die Bewegung auf kreisförmiger Bahn.

Eine bekannte Tatsache ist es, daß ein an einem Faden befestigter schwerer Körper, wenn er im Kreise geschwungen wird, das Bestreben hat, nach außen zu fliegen. Auf dieser Tatsache beruhen die Schleudern. Wird in irgendeinem Augenblicke der Faden einer solchen Schleuder freigelassen, so fliegt der Körper in der Richtung der Tangente an seine Kreislaufbahn fort. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist hierbei gleich der Geschwindigkeit, mit welcher er die Kreisbahn beim Schwingen durchlaufen hat. Während des Schwingens wird der Körper durch eine Kraft nach außen gezogen, welche den Faden straff spannt. Im Faden selbst wirkt eine Kraft, die Zugkraft desselben, nach dem Drehungsmittelpunkt zu. Eine dritte Kraft endlich wirkt in der Bewegungsrichtung und erzeugt die Bewegung

des Körpers in seiner kreisförmigen Bahn. Die erste Kraft heißt die Zentrifugalkraft, die zweite die Zentripetalkraft, die dritte die Tangentialkraft.

Im Punkte M, Fig. 50, wirkt die Zentrifugalkraft + Z nach außen, die Zentripetalkraft — Z nach innen und die Kraft P in der Richtung der Tangente an die Kreisbahn im Punkte M. + Z und — Z halten sich das Gleichgewicht.

Die Zentrifugalkraft ist das Produkt aus der Masse m und der Zentrifugalbeschleunigung, und die letztere ist dem Quadrat der Geschwindigkeit v direkt, dem Halbmesser der Kreisbahn umgekehrt proportional, so daß man die Gleichung erhält

$$Z = m \cdot p = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Bezeichnet ferner ω die Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit in der Entfernung des Halbmessers $r = 1$ vom Mittelpunkt O des Kreises gemessen, so ist die Geschwindigkeit auf der Kreisbahn $v = r \cdot \omega$, und daraus die Zentrifugalkraft

$$Z = m \cdot \frac{r^2 \cdot \omega^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2.$$

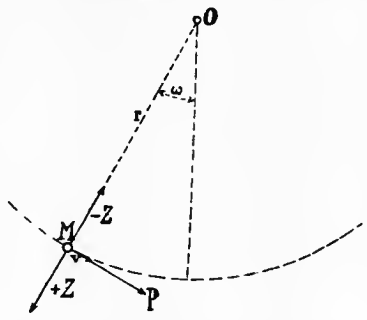


Fig. 50.

Bei gleichförmiger Umlaufsgeschwindigkeit ist der Weg, den der Punkt M auf der Kreisbahn bei einem Umlauf beschreibt, gleich dem Kreisumfang $2 r \cdot \pi$, also bei n Umläufen in der Minute $n \cdot 2r \cdot \pi$ und in der Sekunde $\frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30}$, so daß man erhält

$$v = r \cdot \omega = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30} \text{ oder } \omega = \frac{\pi}{30} \cdot n,$$

die Winkelgeschwindigkeit im Abstand $r = 1$, z. B. = 1 m.

Ist z. B. $n = 300$ in der Minute, so ist

$$\omega = \frac{\pi}{30} \cdot 300 = 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4 \text{ m/Sek.}$$

Nach der zweiten obigen Gleichung ist die Zentrifugalkraft dem Halbmesser der Kreisbahn und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit direkt proportional.

1. Beispiel. In einer Schleuder von 0,6 m Länge wird ein Stein von 2 kg Gewicht herumgeschleudert, und macht dieselbe bei ihrer größten Geschwindigkeit 2 Umdrehungen in der Sekunde.

Wie groß ist die Zentrifugalkraft, mit welcher die Schleuder gespannt wird und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit fliegt der Stein, wenn die Schleuder losgelassen wird, fort?

Nach der obigen, ersten Gleichung ist

$$Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Zunächst ist $v = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{0{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 60}{30} = 7{,}54$ m/Sek.

Mit dieser Anfangsgeschwindigkeit wird auch der Stein beim Lösen der Schleuder fortfliegen.

Die Zentrifugalkraft ist

$$Z = \frac{2}{9{,}81} \cdot \frac{7{,}54^2}{0{,}6} = \frac{56{,}85}{2{,}943} = 19{,}3 \text{ kg}.$$

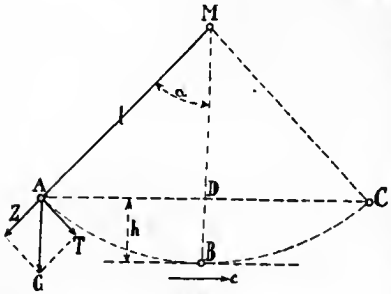


Fig. 51.

2. Beispiel. Eine 400 pferdige Hochofen-Gebläsemaschine hat ein Schwungrad, dessen Kranzgewicht 30 000 kg beträgt. Dasselbe hat einen Halbmesser von 4 m und macht 14 Umdrehungen in der Minute. Die Umfangsgeschwindigkeit und Zentrifugalkraft, mit welcher der Ring oder Radkranz beansprucht wird, ist zu berechnen. Es ist

$$v = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 14}{30} = 5{,}86 \text{ m/Sek}.$$

Die Zentrifugalkraft berechnet sich aus der Gleichung

$$Z = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{30\,000}{9{,}81} \cdot \frac{5{,}86^2}{4} = 27\,663 \text{ kg}.$$

Da das Schwungrad sechs Arme besitzt, so wird jeder Arm eine Beanspruchung durch die Zentrifugalkraft von $27\,663 : 6 \sim 4600$ kg erhalten.

C. Die Pendelbewegung.

Denkt man sich den an einem gewichtlosen Faden befestigten Körper A, Fig. 51, aus seiner mittleren Schwerpunktslage MB z. B. nach links bewegt und dann losgelassen, so fällt derselbe vermöge der Schwerkraft wieder in seine Mittellage zurück. In dieser angelangt bleibt er jedoch nicht in Ruhe, sondern geht mit einer ge-

wissen, allmählich abnehmenden Geschwindigkeit über diese Lage hinaus nach C, kommt dort momentan zur Ruhe, kehrt sodann wieder um und in die Anfangslage MA zurück. Würde er dort nicht aufgefangen, so würde das Spiel sich wiederholen.

Man sagt, daß der Körper um seine Mittel- oder Schwerpunktslage schwinge oder pendele und bezeichnet den mittels des Fadens bei M aufgehangenen Körper A als ein gewöhnliches Pendel oder ein Kreispendel.

Je nachdem man nun den Körper A nur als einen materiellen Punkt an dem gewichtlosen Faden AM oder als einen an einer Stange befestigten materiellen Körper, Scheibe, Kugel o. dgl. betrachtet, unterscheidet man ein einfaches oder mathematisches und ein materielles oder physikalisches Pendel. Für die Untersuchung der Pendelbewegung soll das erstere vorausgesetzt werden.

Im Punkte A wirkt auf den materiellen Punkt nur die Schwerkraft G lotrecht nach unten. Zerlegt man dieselbe nach der Richtung AM und senkrecht dazu, so erhält man die beiden Komponenten Z und T, und zwar ist

$$Z = G \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad T = G \cdot \sin\alpha.$$

Die Komponente Z wird vom Faden AM aufgenommen und erzeugt die Fadenspannung, während die Komponente T diejenige Kraft ist, welche den Körper auf der Kreisbahn oder dem Schwingungsbogen ABC bewegt.

Aus der Gleichung für T folgt zunächst, daß die Kraft um so größer ist, je größer der Winkel α, der Ausschlag, oder Ausschlags- oder Elongationswinkel ist. Dies ist aber der Fall, je höher der Punkt A anfänglich gehoben wurde, oder je größer der Wert von h, die Fallhöhe des Punktes A, ist.

Aus Figur 51 ergibt sich, daß

$$h = BM - DM = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) \text{ ist.}$$

Für $\alpha = 0$, also für die lotrechte Mittellage ist $\cos\alpha = 1$, also $h = 0$, für $\alpha = 90^0$ ist $\cos\alpha = 0$, also $h = l$.

Die Geschwindigkeit c im Punkte B ist dieselbe, als wenn der materielle Punkt um die Höhe h frei gefallen wäre, also nach den früheren Gleichungen

$$c = \sqrt{2g \cdot h}.$$

Die Zeit, welche der materielle Punkt A zum Zurücklegen des Weges ABC oder zu einer Schwingung braucht, heißt die Schwingungszeit oder Schwingungsdauer des Pendels. Sie berechnet

sich mit großer Annäherung für nicht zu große Schwingungsweiten aus der (hier nicht ableitbaren) Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{l} = \frac{3{,}1415}{3{,}1321} \cdot \sqrt{l} = 1{,}003 \cdot \sqrt{l},$$

worin $g = 9{,}81$ für den 45. Breitegrad eingesetzt ist.

Aus der Gleichung folgt sofort, daß für jeden Wert von g, der Akzeleration der Schwere, also für jeden Punkt der Erde die Schwingungsdauer desselben Pendels von der Größe g an diesem Punkte abhängig ist.

Da am Äquator z. B. $g = 9{,}7806$ m ist, so wird für diesen der Wert der Schwingungszeit ein anderer sein, als auf dem 45. Breitegrad. Man hat hieraus rückwärts die Abnahme der Schwerkraft von den Polen nach dem Äquator zu nachgewiesen. So ist die Akzeleration der Schwere am Äquator $g = 9{,}7806$ m, an den Polen $g = 9{,}831$ m, also dort um 5,1 cm oder 0,52 % größer als am Äquator.

1. Beispiel. Es soll die Länge des Pendels, welches zu seiner Schwingung genau 1 Sekunde braucht, des sogenannten Sekundenpendels, und die Länge desjenigen Pendels, welches für eine Doppelschwingung (also einen Hin- und Rückgang) 1 Sekunde braucht, für den 45. Breitegrad berechnet werden.

Setzt man in der obigen Gleichung $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ die Zeit $t = 1$, so folgt $\frac{1}{\pi^2} = \frac{l}{g}$, und

$$l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}81}{9{,}8696} = 0{,}994 \text{ m, also rund } = 1 \text{ m}.$$

Für das zweite Pendel ist die Zeit einer Doppelschwingung $= 1$, also einer einfachen Schwingung $= \frac{1}{2}$ Sek., es ist somit zu setzen $\frac{1}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{1}{4\pi^2} = \frac{l}{g}$ und $l = \frac{9{,}81}{4\pi^2} = \frac{9{,}81}{39{,}48} = 0{,}2485$ m, also rund $= {}^1/_4$ m. Man sieht hieraus, daß die Pendellängen sich verhalten, wie die Quadrate der Schwingungszeiten, wie auch aus der obigen Gleichung sofort folgt. Bezeichnet man nämlich für den ersten Fall die Zeit mit t_1, die Pendellänge mit l_1, für den zweiten Fall die betreffenden Werte mit t_2 und l_2, so gelten die beiden Gleichungen:

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \text{ und } t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

woraus folgt:

$t_1^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot l_1$, $t_2^2 = \frac{\pi^2}{g} \cdot l_2$ und durch Division der ersten Gleichung durch die zweite:

$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{l_1}{l_2}$, also z. B. für $\frac{l_1}{l_2} = 4$, (z. B. $l_1 = 0{,}995$, $l_2 = 0{,}248$ m) wird $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{4} = 2$, d. h., wenn ein Pendel 4 mal so lang wie ein anderes ist, so ist seine Schwingungszeit doppelt so groß (z. B. 1 Sekunde) als diejenige des kleineren Pendels ($^1/_2$ Sekunde).

2. Beispiel. In Fig. 52 ist mit ABC_1 eine sogenannte russische Rutschbahn schematisch dargestellt. Es soll unter der Annahme völlig reibungsloser Bewegung die Geschwindigkeit, mit welcher ein auf der Bahn rollender Wagen durch die Punkte B und C_1

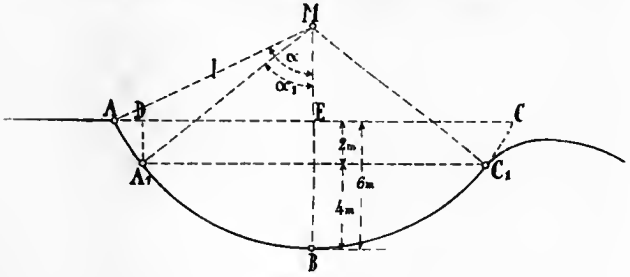


Fig. 52.

fährt, und die Zeit für die Fahrt von A—C_1 berechnet werden.

Die Bahn soll kreisförmig, der Winkel $\alpha = 45^0$[1]), die lotrechte Fallhöhe = 6 m und der Höhenabstand von C_1 unter AC = 2 m sein.

Aus der Figur folgt zunächst, BE = BM — EM, oder

$$l - l \cdot \cos\alpha = 6\text{ m}, \text{ oder } l(1 - \cos\alpha) = 6,\ l = \frac{6}{1-\cos\alpha} = \frac{6}{0{,}293} = 20{,}48\text{ m}.$$

Die Schwingungszeit ist $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 3{,}14\sqrt{\frac{20{,}48}{9{,}81}} = 6\,55$ Sek.

Diese Zeit gilt jedoch für den Weg von A über B bis C, es soll jedoch nur die Zeit bis zum Punkte C_1 berechnet werden. Hierzu ist zunächst noch die Strecke $CC_1 = AA_1$ zu berechnen.

Zunächst ist $AE = \frac{AC}{2} = l \cdot \sin\alpha$, also $AC = 2 \cdot l \cdot \sin\alpha = 28{,}96$ m.

Ferner ist $l \cdot \cos\alpha_1 - l\cos\alpha = 2$ m, daraus berechnet sich der

1) In der Figur ist der Winkel der größeren Deutlichkeit wegen etwas größer gezeichnet.

Winkel α_1 zu 36°30′ und $A_1C_1 = 2 \cdot l \cdot \sin\alpha = 24{,}36$ m, mithin $AD = \frac{AC - A_1C_1}{2} = \frac{28{,}96 - 24{,}36}{2} = 2{,}3$ m.

Nimmt man $AA_1 = CC_1$ annähernd als Gerade an, so folgt $AA_1 = \sqrt{AD^2 + A_1D^2} = \sqrt{2{,}3^2 + 2^2} = 3{,}05$ m.

Da der $\sphericalangle \alpha = 45°$, also $2\alpha = 90°$ ist, so ist der Bogen $ABC = \frac{1}{4}$ des Kreisumfanges $= \frac{2 \cdot l \cdot \pi}{4} = 32{,}154$ m, mithin der durchlaufene Weg $ABC_1 = 32{,}154 - 3{,}05 = 29{,}1$ m.

Die Geschwindigkeit im Punkte B ist

$$c = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6} = 10{,}847 \text{ m/Sek.},$$

diejenige im Punkte A_1, also auch in C_1,

$$c_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 6{,}27 \text{ m/Sek.}$$

Die Fallzeit war oben (S. 62) zu $t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$ berechnet.

Die Pendelschwingungszeit für den halben Bogen AB beträgt $\frac{t}{2} = \frac{6{,}55}{2} = 3{,}275$ Sek., die Fallzeit für die Fallhöhe von 6 m dagegen $t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{9{,}81}} = \sim 1{,}11$ Sek.

Die Fallzeit für die Fallhöhe von 2 m ergibt sich zu $t_0' = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{9{,}81}} = \frac{2}{3{,}13} = 0{,}638$ Sek.

Um nun endlich die Schwingungszeit t_x für den Weg AA_1, also auch für C_1C zu bestimmen, kann man, ohne einen großen Fehler zu begehen, annehmen, daß die Fallzeiten und Schwingungszeiten proportional sind, also $t_x : 0{,}638 = 3{,}275 : 1{,}11$ sich verhält, woraus sich berechnet

$$t_x = \frac{3{,}275 \cdot 0{,}638}{1{,}11} = 1{,}882 \text{ Sek.}$$

Man erhält somit die Schwingungs- bzw. Fahrzeit für den Weg der Rutschbahn ABC_1 zu:

$$t_1 = 6{,}55 - 1{,}882 = 4{,}668 \text{ Sek.}$$

D. Die Bewegung auf der schiefen Ebene.

Die in Fig. 53 abgebildete schiefe Ebene AB ist eine unter dem Winkel α gegen die Horizontale AC geneigte ebene Fläche, auf

welcher ein Körper vom Gewicht G liegt, der bei bestimmter Größe des Winkels α heruntergleitet. Es ist klar, daß, wenn der Winkel etwa von 0^0 bis 90^0 wachsen würde, der Körper anfänglich, bei schwachen Neigungen der Ebene, liegen bleiben würde, bei einem bestimmten Winkel aber anfangen würde herabzugleiten. Es soll jedoch vorausgesetzt werden, daß zwischen dem Körper und der schiefen Ebene keine Reibung bestände, so daß also sowohl die Oberfläche des Körpers als auch diejenige der schiefen Ebene absolut glatt sein soll.

Zerlegt man das Gewicht G in zwei Komponenten P und N parallel und senkrecht zur schiefen Ebene, so ist $P = G \cdot \sin \alpha$ und $N = G \cdot \cos \alpha$. Die Grenzfälle ergeben sich hieraus sofort: für $\alpha = 0^0$ ist $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$, also $P = 0$, $N = G$ und für $\alpha = 90^0$ ist $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$, also $P = G$ und $N = 0$; d. h. bei horizontaler Ebene ist der Normaldruck gleich dem Gewicht G des Körpers, und die Kraft parallel zur Ebene gleich Null, bei lotrecht stehender Ebene ist der Normaldruck gleich Null, dagegen die Kraft parallel zur Ebene gleich dem Gewicht G des Körpers.

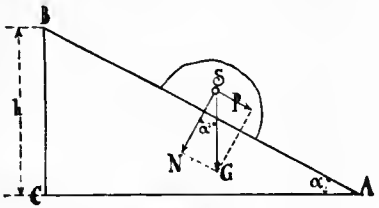


Fig. 53.

Für α =	30^0	45^0	60^0	75^0
ist: P =	0,5 · G	0,707 · G	0,866 · G	0,966 · G
und N =	0,866 · G	0,707 · G	0,5 · G	0,259 · G.

Die Normalkraft N erzeugt die Reibung zwischen dem Körper und der schiefen Ebene, während die Kraft P den Körper auf der Ebene herunter zu bewegen sucht.

Bezeichnet noch p die Beschleunigung, welche diese Kraft dem Körper erteilt, so ist $P = m \cdot p$.

Da aber $G = m \cdot g$ ist, so folgt

$$P = G \cdot \sin \alpha = m \cdot p = m \cdot g \cdot \sin \alpha, \quad \text{oder}$$

$$\frac{p}{g} = \sin \alpha, \quad \text{also auch} \quad p : g = \sin \alpha : 1, \quad \text{d. h.}$$

die Beschleunigung des Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie $\sin \alpha : 1$. Da jedoch der Wert $\sin \alpha$ stets kleiner als 1 ist, so ist die Beschleunigung auf der schiefen Ebene stets kleiner als diejenige des freien Falles.

Um die Endgeschwindigkeiten und Fallzeiten zu berechnen, sind die bekannten Gleichungen (s. oben S. 62) anzuwenden.

Es ist zunächst die Geschwindigkeit für die Bewegung auf der schiefen Ebene, $v_e = p \cdot t$, also da $p = g \cdot \sin\alpha$ ist, $v_e = g \sin\alpha \cdot t$.

Für den freien Fall dagegen ist $v_f = g \cdot t$. Man erhält somit $v_e : v_f = \sin\alpha : 1$, d. h. die Geschwindigkeiten verhalten sich ebenso wie die Beschleunigungen, d. h. wie $\sin\alpha : 1$.

Der zurückgelegte Weg ist für die Bewegung auf der schiefen Ebene

$$s_e = \frac{v_e}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t \cdot \sin\alpha}{2} \cdot t = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2},$$

für die Fallbewegung

$$s_f = \frac{v_f}{2} \cdot t = \frac{g \cdot t}{2} \cdot t = g \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Es verhalten sich also auch die Wege $s_e : s_f = \sin\alpha : 1$.

Nun ist in Fig. 53 $AB = s_e$ der Weg, welcher in der Zeit t zurückgelegt wird. Daraus folgt, da $\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{h}{s_e}$ ist:

$$s_f = \frac{s_e}{\sin\alpha} = \frac{s_e}{\frac{h}{s_e}} = \frac{s_e^2}{h}, \text{ oder } s_f \cdot h = s_e^2 \text{ oder } \frac{h}{s_e} = \frac{s_e}{s_f}, \text{ d. h.}$$

der in der Zeit t auf der schiefen Ebene zurückgelegte Weg s_e ist die mittlere Proportionale zwischen der Steigungshöhe h der schiefen Ebene und der Freifallhöhe s_f für die gleiche Zeit t.

Die Zeit zum Durchlaufen des Weges $AB = s_e$ berechnet sich aus der obigen Gleichung

$$s_e = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} \quad \text{zu} \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot s_e}{g \cdot \sin\alpha}}.$$

1. Beispiel. Wie groß ist die Länge einer schiefen Ebene, auf welcher ein (reibungslos gedachter) Wagen herabrollen muß, um am Endpunkt A eine Geschwindigkeit von 60 km/Std. zu besitzen, wenn die Steigung der schiefen Ebene $12{,}5\,‰ = 1{,}25\,\%$ beträgt.

Der Geschwindigkeit von 60 km/St. entspricht eine solche von $v_e = \frac{60 \cdot 1000}{3600} = 16{,}67$ m/Sek.

Die Steigung von 1,25 % bedeutet auf 100 m Länge 1,25 m Steigung. Hieraus berechnet sich $\sin\alpha = \frac{1{,}25}{100} = 0{,}0125$.

Aus der obigen Gleichung für v_e folgt zunächst

$$t = \frac{v_e}{g \cdot \sin\alpha} = \frac{16{,}67}{9{,}81 \cdot 0{,}0125} = 135 \text{ Sek.} = 2 \text{ Min. } 15 \text{ Sek.}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung $s_e = g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2}$ ein, so folgt

$$s_e = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}0125}{2} \cdot 135^2 = 0{,}0615 \cdot 18\,225 = 1120{,}8\,\text{m} \sim \mathbf{1{,}121\ km.}$$

In Wirklichkeit wird infolge der Eigenreibungen des Wagens und der Reibung desselben auf der Bahn der Weg beträchtlich länger und die Zeit größer sein, bis die Endgeschwindigkeit von 60 km/St. erreicht ist.

2. Beispiel. Beim Abbruch hoher Gebäude verwendet man vielerorts hölzerne Fallrinnen, in welchen die abgebrochenen Steine zum Erdboden niedergelassen werden. Die Rinne habe in der unteren Hälfte eine Steigung von 45°, in der oberen eine solche von 70°. Die ganze Fallhöhe beträgt 20 m. Welche Zeit gebraucht ein Ziegelstein, um die ganze Rinne zu durchlaufen?

Man hat zwei Zeitabschnitte zu unterscheiden, denjenigen zum Durchfallen durch das obere Rinnenstück und denjenigen für die untere Hälfte. Bezeichnet man die erste Zeit mit t_1, die zweite mit t_2, so folgt aus den obigen Gleichungen:

$$s_{e_1} = \frac{g \cdot \sin\alpha_1}{2} \cdot t_1^2 \text{ und } s_{e_2} = \frac{g \cdot \sin\alpha_2}{2} \cdot t_2^2.$$

Zunächst ist $\sin\alpha_1 = \sin 70^0 = 0{,}9397$ und $\sin\alpha_2 = \sin 45^0 = 0{,}707$.

Aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen folgt

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_{e_1}}{g \cdot \sin\alpha_1}} \text{ und } t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot s_{e_2}}{g \cdot \sin\alpha_2}}.$$

Da die ganze Höhe 20 m, die Hälfte 10 m beträgt, so ist, da $\frac{h_1}{s_{e_1}} = \sin\alpha_1$ oder $s_{e_1} = \frac{h_1}{\sin\alpha_2}$ und $\frac{h_2}{s_{e_2}} = \sin\alpha_2$, also $s_{e_2} = \frac{h_2}{\sin\alpha_2}$ ist, $s_{e_1} = \frac{10}{0{,}9397} = 10{,}64$ m und $s_{e_2} = \frac{10}{0{,}707} = 14{,}14$ m.

Man erhält somit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10{,}64}{9{,}81 \cdot 0{,}9397}} = 1{,}516 \text{ und } t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 14{,}14}{9{,}81 \cdot 0{,}707}} = 2{,}02,$$

also zusammen

$$t = t_1 + t_2 = 3{,}536 \text{ oder } \sim 3\tfrac{1}{2}\ \text{Sek.}$$

Die beiden wichtigsten Hauptanwendungen der schiefen Ebene in der Technik sind der Keil und die Schraube, auf welche jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

E. Der Schubkurbelmechanismus.

Derselbe ist in Fig. 54 schematisch dargestellt und besteht aus der Kurbel OB, welche sich um die festgelagerte Drehachse, Welle, bei O dreht, der Kurbelstange oder Pleuelstange MB und dem Kolben K mit der Kolbenstange MK. Während die Kurbel eine kreisförmige oder Drehbewegung um die Welle O ausführt, geht der Punkt M und mit ihm gleichlaufend der Kolben K geradlinig hin und her. Dieser Mechanismus dient daher zur Umwandlung einer geradlinig hin und her gehenden Bewegung in eine drehende Bewegung und umgekehrt einer drehenden in eine geradlinige.

Er findet Anwendung bei allen Zylinderdampfmaschinen, Pumpen, Gebläsen, bei den Verbrennungsmaschinen, bei hydraulischen

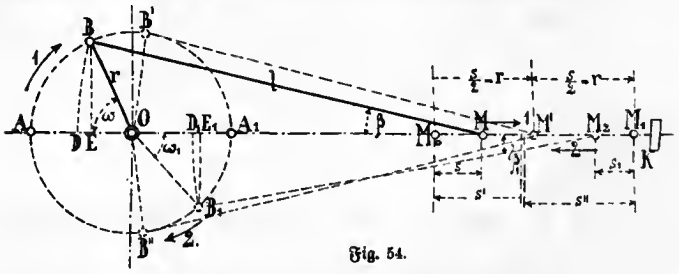


Fig. 54.

Pressen, zum Antriebe der Wasserdruckpumpen und bei zahlreichen anderen Maschinen.

Wie die nachfolgenden Berechnungen zeigen werden, ist die Bewegung keine gleichmäßige, vielmehr entsprechen gleichen Drehwinkeln oder Umdrehungsgeschwindigkeiten ungleiche Geschwindigkeiten des Punktes M und des Kolbens.

Damit die Bewegung des Punktes M dauernd auf einer geraden Linie erfolgt, muß derselbe durch eine Geradführung geführt, also gezwungen werden, nur diese Bewegung anzunehmen. Dieselbe besteht meistens aus zwei Gleitschienen, zwischen welchen ein am Gelenk bei M befindliches Gleitorgan, der sogenannte Kreuzkopf, hin und her gleitet.

Beschreibt man aus dem Punkte M mit $MB = l$ einen Kreisbogen auf die Horizontale, so ist $DM = l$. Zieht man noch BE senkrecht auf die Horizontale, so läßt sich die Beziehung des Kolbenweges s zum Drehwinkel ω der Kurbel leicht ermitteln.

Da nämlich in der Anfangslage AO der Kurbel, dem sogenannten äußeren Todpunkte, die Strecke $M_0A = l$ ist, und MD auch $= l$ ist, so ist $AD = M_0M = s$.

Man erhält nun AD aus der Differenz von AO und DO. DO ist aber $= DE + EO$ und $DE = DM - EM$ und $EO = r \cdot \cos\omega$.

Man erhält somit die Gleichung

$$AD = s = AO - DE - EO = r - r \cdot \cos\omega - (DM - EM)$$
$$= r(1 - \cos\omega) - (l - l \cdot \cos\beta) = r(1 - \cos\omega) - l(1 - \cos\beta),$$

worin β der Winkel zwischen der jeweiligen Lage der Pleuelstange und der Horizontalen ist.

Kommt der Punkt B in den Punkt A_1, den sogenannten zweiten oder inneren Todpunkt, so ist Punkt M nach M_1 gekommen. Jetzt kehrt, wenn die Drehung über A_1 hinaus fortgesetzt wird (Pfeil 2), der Punkt M, also auch der Kolben wieder zurück, bis A_1 nach A und M nach M_0 zurückgekehrt ist.

Man nennt den ersten Kolbenweg M_0M_1 den Hingang, den zweiten Kolbenweg M_1M_0 den Rückgang des Kolbens. Es entspricht also einer einzigen Umdrehung der Kurbel ein doppelter Kolbenweg, oder ein Hin- und Rückgang des Kolbens. Hierauf beginnt die Periode wieder von neuem. Die Ungleichheit der Geschwindigkeit bezieht sich also nur auf eine einzige Umdrehung und nennt man eine solche eine Periode, die Bewegung des Kurbelmechanismus also eine periodische.

Für den Rückgang gilt nun folgendes.

Der Weg $M_1M_2 = s_1$ in der Richtung des Pfeiles 2 ist, wenn wieder aus M_2 mit l der Bogen B_1D_1 beschrieben wird, gleich A_1D_1.

Letztere Strecke erhält man wieder aus der Differenz der Strecken A_1O und D_1O. Letzteres Stück ist aber $E_1O - D_1E_1$. Man hat somit

$$s_1 = A_1D_1 = A_1O - OE_1 + E_1D_1 = r - r \cdot \cos\omega_1 + (M_2D_1 - M_2E_1)$$
$$= r(1 - \cos\omega_1) + (l - l \cdot \cos\beta_1) = r(1 - \cos\omega_1) + l(1 - \cos\beta_1).$$

Man hat somit für den Hin- und Rückgang die allgemeine Gleichung

$$s = r(1 - \cos\omega) \mp l(1 - \cos\beta),$$

worin das obere Zeichen (—) für den Hingang, das untere (+) für den Rückgang gilt.

Man sieht hieraus sofort, daß gleichen Drehwinkeln ω beim Hin- und Rückgang nicht dieselben Kolbenwege s, also auch nicht dieselben Kolbengeschwindigkeiten entsprechen.

In den beiden rechtwinkeligen Dreiecken EBO und EBM ist nun $EB = r \cdot \sin\omega = l \cdot \sin\beta$, mithin $\sin\beta = \frac{r}{l} \cdot \sin\omega$. Da nun bekanntlich $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, also $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$ ist, so folgt

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2\omega} \quad \text{und}$$

$$s = r(1 - \cos\omega) \mp l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2\omega}\right),$$

worin s nur in Beziehung zum Drehwinkel ω steht.

Für $\omega = 90^0, 180^0, 270^0$ erhält man z. B. folgende Werte von s. Für 90^0 ist $\sin\omega = 1$, $\cos\omega = 0$. Setzt man noch das Verhältnis $\frac{r}{l}$ ein, welches für jede Maschine bekannt ist, z. B. $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, welcher Wert vielfach üblich ist, so folgt für $\omega = 90^0$

$$s = r(1 - 0) - 5r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{25} \cdot 1}\right) = r - 5r\left(1 - \sqrt{\frac{24}{25}}\right)$$
$$= r - 5r(1 - 0{,}989) = r(1 - 0{,}055) = 0{,}945 \cdot r,$$

also kleiner als die halbe Entfernung ($AA_1 = 2r$) der beiden Todpunkte.

Für $\omega = 180^0$ ist $\cos\omega = -1$, $\sin\omega = 0$, also

$$s = r(1 - -1) \mp l(1 - \sqrt{1 - 0}) = 2r \mp l(1 - 1) = 2r,$$

was auch ohne weiteres aus der Figur folgt. Der ganze Kolbenhub ist stets gleich dem Durchmesser 2r des Kurbelkreises.

Für $\omega = 270^0$ ist $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = -1$, mithin

$$s = r(1 - 0) + 5r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{25}}\right) = r(1 + 0{,}055) = 1{,}055 \cdot r,$$

also größer als die halbe Entfernung der beiden Todpunkte. Die beiden, den Winkeln 90^0 und 270^0 entsprechenden Kolbenwege sind in der Figur mit s′ und s″ bezeichnet, während der halbe Kolbenweg $\frac{s}{2} = r$ über der Linie M_0M_1 dargestellt ist. Um den Drehwinkel zu berechnen, welcher diesem Kolbenweg $\frac{s}{2} = r$ entspricht, ist in die obige Gleichung $s = r$ einzusetzen, woraus man nach einigen Umformungen den Drehwinkel zu $95^0\,45'$ erhält, welcher Winkel in der Figur mit AOB′ bezeichnet ist. Beim Rückgang des Kolbens ist derselbe nur $84^0\,15'$ groß; Stellung M′B″O.

Man erkennt aus dem Vergleich der Strecken $\frac{s}{2}$, s′ und s″ mit den zugehörigen Drehwinkeln sofort die Ungleichförmigkeit der Kolbenbewegung.

Noch augenfälliger tritt dies in die Erscheinung, wenn man, wie in Fig. 55 geschehen, den Kurbelkreis in acht gleiche Teile von je 45° teilt und die den Stellungen 1 — 8 entsprechenden Stellungen des Kolbens aufzeichnet.

Setzt man eine gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit der Kurbel voraus, so legt der Kolben während des Bogens 1 — 3 = 90° den Kolbenweg 12,23, während der gleich großen Drehung 3 — 5 = 90° dagegen den weitaus größeren Weg 345 zurück. Die Geschwindigkeit ist somit bei diesem Drehwinkel am größten, nimmt nach dem Todpunkt 6 hin wieder ab und dann wieder zu, um auf dem Wege 781 wieder ihren größten Wert zu erhalten. Gleichförmigen Kurbelgeschwindigkeiten entsprechen also ungleichförmige

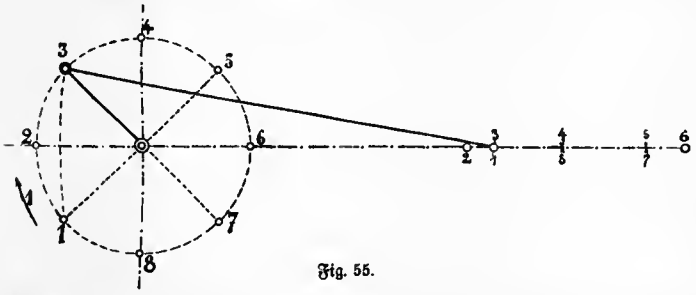


Fig. 55.

Kolbengeschwindigkeiten und umgekehrt. Betrachtet man eine einzelne Periode und bezeichnet mit v die Umfangsgeschwindigkeit des Punktes B, des Endpunktes der Kurbel, Fig. 54, also die Kurbelgeschwindigkeit und mit v_1 die mittlere Kolbengeschwindigkeit, so ist die Geschwindigkeit, da $2r\pi$ der Weg bei einer Umdrehung, also bei n Umdrehungen in der Minute $2r\pi \cdot n$ ist, daher in einer Sekunde

$$v = \frac{2r \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30}.$$

Der mittlere Kolbenweg ist bei einer Umdrehung $2s = 4r$, also bei n Umdrehungen $4r \cdot n$ und in der Sekunde

$$v_1 = \frac{4 \cdot r \cdot n}{60} = \frac{2r \cdot n}{30}.$$

Man erhält somit das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\textit{mittlere Kolbengeschwindigkeit}}{\textit{Kurbelgeschwindigkeit}} = \frac{2r \cdot n}{r \cdot \pi \cdot n} = \frac{2r}{r \cdot \pi} = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366,$$

d. h. die mittlere Kolbengeschwindigkeit ist nur etwa $^2/_3$ mal so groß als die konstante Kurbelgeschwindigkeit. Nach den Todpunkten der Kurbel und den Endstellungen der Kolben hin nimmt die Geschwindigkeit stetig ab und ist in den beiden Todpunkten gleich Null, während sie ihren absolut größten Wert beim Hingang bei einem Drehwinkel ω von etwa 101° und beim Rückgang von etwa 79° erreicht und bei einem Verhältnis von $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, wie oben beispielsweise angenommen war, dabei den Wert $v_1 = 1{,}02\,v$ erreicht.

Ist z. B. der Kurbelhalbmesser $r = 0{,}4$ m, die Tourenzahl in der Minute $= 80$, so folgt

$$v = \frac{r \cdot \pi \cdot n}{30} = \frac{0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 80}{30} = 3{,}351 \text{ m/Sek.}$$

und v_1 im Mittel $= 0{,}6366 \cdot v = 2{,}133$ m/Sek.

und $v_{1_{max}} = 1{,}02 \cdot v = 3{,}417$ m/Sek.

F. Das Kurbelviereck.

Ein anderer interessanter Mechanismus, bei welchem ebenfalls nur gezwungene Bewegungen ausgeführt werden, ist das Kurbelviereck, Fig. 56, welches aus zwei untereinander verbundenen ungleichlangen Kurbeln OB und O_1B_1, der Koppel BB_1 und den beiden festgelagerten Drehachsen O und O_1 besteht. Man kann auch sagen, daß es aus vier durch starre Körper miteinander verbundenen Gelenken besteht, bei welchen die Verbindungslinie der beiden Kurbeln festgelagert ist. Während die kleinere derselben den Kurbelkreis ABCA beschreibt (in der Richtung des Pfeils 1 beim Hingang, des Pfeils 2 beim Rückgang), schwingt die größere Kurbel oder Schwinge zwischen den Endlagen O_1A_1 und O_1C_1 hin und her. Einer ganzen Umdrehung der Kurbel entspricht also eine Doppelschwingung der Schwinge. Die den beiden Endlagen A_1O_1 und C_1O_1 entsprechenden Stellungen der Kurbel AO und CO liegen nicht, wie beim Schubkurbelmechanismus einander gegenüber, sondern um $(180 + \gamma)$ voneinander entfernt. Beim Hingang entspricht also dem Wege $A_1B_1C_1$ der Schwinge der Drehwinkel $180 + \gamma$ oder der Bogen ABC des Kurbelkreises, beim Rückgang demselben Wege der Drehwinkel $180 - \gamma$ oder der Bogen CA. Man sieht hieraus sofort, daß die Bewegung der Schwinge bei gleichförmiger Bewegung des Kurbelendpunktes eine ungleichförmige ist.

Aber auch während eines Hin- oder eines Rückganges ist die Bewegung anfangs weniger, nachher mehr beschleunigt und zum Schluß verzögert, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man in Fig. 56 den Kurbelkreis z. B. von A aus in acht gleiche Teile, 1 bis 8, teilt und die entsprechenden Stellungen auf dem Schwingungsbogen aufzeichnet.

Die beiden Todpunktlagen auf dem Schwingungsbogen erhält man, wenn man von O aus mit $l - r$ und $l + r$ den Schwingungs-

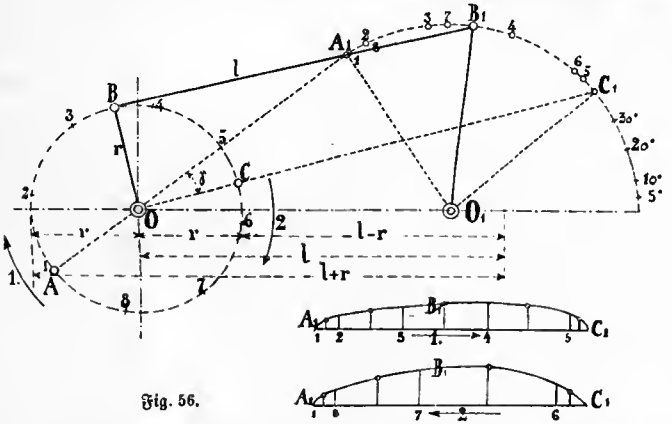


Fig. 56.

bogen schneidet, wodurch man die Punkte A_1 und C_1 erhält. Darin bezeichnet $l = BB_1$ die Länge der Koppel. Zieht man noch von A_1 und C_1 durch O Gerade, so erhält man die entsprechenden Punkte A und C auf dem Kurbelkreis, welche den Todpunkten A_1 und C_1 entsprechen.

Die Ungleichförmigkeit der Bewegung erkennt man noch besser, wenn man den der Kurbeldrehung 1—2 um 45° entsprechenden Weg 1—2 auf dem Schwingungsbogen mit den derselben Kurbeldrehung 3—4 oder 6—7 um je 45° entsprechenden Wegen 3—4 bzw. 6—7 des Schwingungsbogens $A_1 C_1$ vergleicht.

Wird z. B. angenommen, daß die Länge des Kurbelhalbmessers $r = 0{,}28$ m, diejenige der Schwinge $R = 0{,}5$ m und die der Koppel $l = 0{,}97$ m sei und daß die Kurbel 90 Touren in der Minute mache, so lassen sich leicht die den einzelnen Drehwinkeln entsprechenden Wege und Geschwindigkeiten der Schwinge berechnen, wenn man die Winkel abmißt.

Der Kurbelweg ist dann $s = \frac{2r \cdot \pi}{8}$ für eine Drehung um 45°, der Weg auf dem Schwingungsbogen $s_1 = R \cdot \pi \cdot \frac{\omega}{180}$, worin ω den zugehörigen Drehwinkel bezeichnet.

Die Geschwindigkeit der Kurbel, u in m/Sek. berechnet sich aus der Gleichung

$$u = \frac{2r \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot 0{,}28 \cdot 3{,}14 \cdot 90}{60} = 2{,}64 \text{ m/Sek.},$$

diejenige u_1 des Schwingungspunktes aus der Gleichung

$$u_1 = \frac{s_1}{s} \cdot u.$$

In der folgenden Tabelle sind die entsprechenden Werte enthalten:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr.	Kurbelbogen	Drehwinkel der Kurbel in °	Drehwinkel der Schwinge in °	Kurbelweg s in m	Weg der Schwinge s_1 in m	$\frac{s_1}{s}$	Umdrehungsgeschwindigkeit u m/Sek.	Geschwindigkeit der Schwinge u_1 m/Sek.	Jeweiliges Verhältnis zur kleinsten Geschwindigkeit der Schwinge
1	1—2	45	8	0,22	0,07	0,32	2,64	0,85	1
2	2—3	45	20	0,22	0,174	0,80	2,64	2,11	2,5
3	3—4	45	26	0,22	0,226	1,03	2,64	2,72	3,2
4	4—5	45	25	0,22	0,218	0,99	2,64	2,62	3,08
5	5—6	45	14	0,22	0,126	0,57	2,64	1,50	1,76
6	6—7	45	42	0,22	0,366	1,66	2,64	4,38	5,15
7	7—8	45	25	0,22	0,218	0,99	2,64	2,62	3,08
8	8—1	45	8	0,22	0,07	0,32	2,64	0,85	1

Spalte 7 zeigt sofort das Verhältnis der Wege, also auch der Geschwindigkeiten zwischen Kurbel und Schwinge, während Spalte 10 das Verhältnis der jeweiligen Geschwindigkeit auf dem Schwingungsbogen zum absolut kleinsten Wert angibt. Wie ungleichförmig dieselbe ist, ergibt sich aus derselben sofort, da beim Hingang die größte Geschwindigkeit 3,2 mal größer als die kleinste Geschwindigkeit ist und beim Rückgang dies Verhältnis sogar 5,15 fach ist.

Trägt man die Bogenlänge A_1C_1 abgewickelt auf einer Geraden auf, wie es unter der Figur geschehen ist, und errichtet auf den Mitten der einzelnen Strecken 12, 23, 34 usw. die in der Tabelle enthaltenen Werte der mittleren Geschwindigkeiten in bestimmtem Maßstabe auf, so erhält man die beiden Diagramme $1—5C_1B_1A_1$ und $A_1B_1C_16—1$, welche ebenfalls deutlich den Verlauf der ungleichförmigen Geschwindigkeit zeigen, wenngleich sie der Wirklichkeit

auch noch nicht genau entsprechen, da in denselben die Geschwindigkeit zwischen 12, 23, 34 usw. auch nicht gleichförmig bleibt, dieselbe vielmehr fortdauernd zu und wieder abnimmt. Indessen zeigen sie doch mit einer gewissen Annäherung den Grad der Ungleichförmigkeit der Geschwindigkeit beim Hingang (Pfeil 1) und beim Rückgang (Pfeil 2).

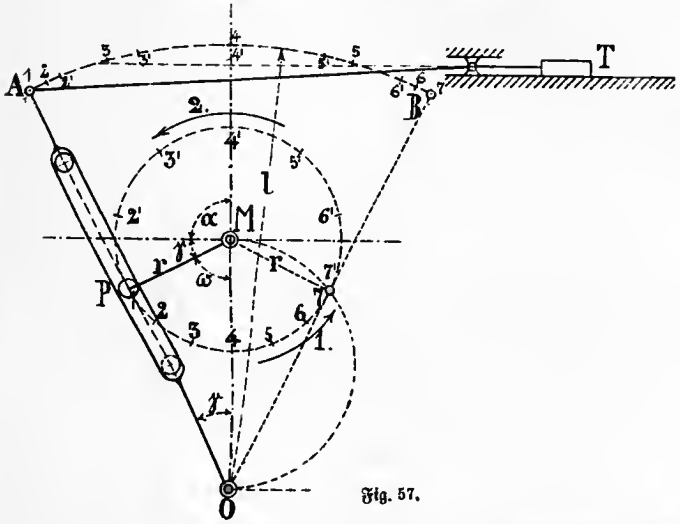


Fig. 57.

Seine ausgedehnteste Anwendung fand dieser Mechanismus bei den sogenannten Balancierdampfmaschinen, den ältesten Dampfmaschinen, bei welchen der Balancier jedoch als Doppelhebel ausgebildet ist. Derselbe ist bereits weiter oben, Fig. 13, auf S. 15 abgebildet, und sei auf das dort Gesagte verwiesen.

G. Die oszillierende Kurbelschleife.

Dieselbe ist dadurch beachtenswert, daß die Geschwindigkeit ihres freien Endpunktes A, Fig. 57, sowohl während einer Schwingung ungleichförmig ist, als auch während des Hinganges größer als während des Rückganges ist, so daß sie vermöge dieser beiden ungleichen Geschwindigkeiten dazu dienen kann und auch vielfach angewandt wird, einen Körper mit periodischer, hin und her gehender Bewegung einmal langsam und einmal — und zwar während des sogenannten Leerlaufes, während dessen keine Nutzarbeit verrichtet wird — rasch zu bewegen.

Die Schwinge APO ist bei O drehbar gelagert. In der Mitte hat sie eine längliche Schleife, in welcher der Kurbelzapfen P auf und ab gleiten kann. Dreht sich die Kurbel MP gleichförmig in der Richtung des Pfeiles 1, so schwingt die Schwinge oder Kurbelschleife um den Drehpunkt O hin und her, während der Zapfen P in der Schleife auf und ab gleitet. Der Endpunkt A bzw. ein mit demselben verbundener Tisch oder Schlitten T wird dabei hin und her bewegt. Die äußeren Endstellungen der Kurbelschleife entsprechen den Stellungen M 1 und M 7 der Kurbel.

Beim Hingang in der Richtung des Pfeiles 1 auf dem Bogen 12 ... 7 beträgt der Drehwinkel der Kurbel nur $2\omega = 180 - 2\gamma$, beim Rückgang, Pfeil 2, dagegen $360 - 2\omega = 180 + 2\gamma$. Hieraus folgt schon sofort, daß bei gleichförmiger Bewegung der Kurbel der Hingang rascher erfolgen muß, als der Rückgang. Der letztere wird daher für die Arbeitsleistung der mit dem Tisch T verbundenen Maschine, z. B. einer Metall-Hobelmaschine, der erstere für den Leergang Anwendung finden.

Teilt man nun wieder die entsprechenden Kreisbogen wie bei dem Kurbelviereck in eine bestimmte Anzahl, z. B. sechs gleiche Teile und konstruiert die einer jeden Kurbelstellung entsprechenden Punkte auf dem Schwingungsbogen AB, bestimmt die Größen der zugehörigen Drehungswinkel, so kann man sich mit ziemlicher Annäherung ein Bild der Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten des Schleifenendpunktes A und somit auch des Tisches T beim Hin- und Rückgang machen.

Die entsprechenden Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Bogen der Kurbel	Drehwinkel ω der Kurbel	Drehwinkel γ der Schwinge	Kurbelweg s in m	Weg des Endpunktes der Schwinge A, s_1 in m	$\frac{s_1}{s}$
1	12	20° 55′	2° 39′	0,091	0,0465	0,51
2	23	20° 55′	8° 15′	0,091	0,145	1,60
3	34	20° 55′	16° 21′	0,091	0,286	3,14
4	45	20° 55′	16° 21′	0,091	0,286	3,14
5	56	20° 55′	8° 15′	0,091	0,145	1,60
6	67	20° 55′	2° 39′	0,091	0,0465	0,51

1	2	3	4	5	6	7
Nr.	Bogen der Kurbel	Drehwinkel ω der Kurbel	Drehwinkel γ der Schwinge	Kurbelweg s in m	Weg des Endpunktes der Schwinge A, s_1 in m	$\frac{s_1}{s}$
7	7′ 6′	39° 5′	4° 15′	0,170	0,0741	0,43
8	6′ 5′	39° 5′	10°	0,170	0,174	1,02
9	5′ 4′	39° 5′	13°	0,170	0,227	1,33
10	4′ 3′	39° 5′	13°	0,170	0,227	1,33
11	3′ 2′	39° 5′	10°	0,170	0,174	1,02
12	2′ 1′	39° 5′	4° 15′	0,170	0,0741	0,43

In derselben gelten die Werte Nr. 1—6 für die Bewegung beim Hingang in der Richtung des Pfeiles 1 und diejenigen Nr. 7—12 für den Rückgang in der Richtung des Pfeiles 2. Die Länge r der Kurbel beträgt hierbei z. B. 0,25 m, die Länge MO = 0,56 m, die Länge OA = l = 1,00 m.

Die letzte Spalte zeigt wieder die Zunahme des Verhältnisses der mittleren Geschwindigkeiten von 0,51—3,14, also um mehr als das 6fache beim Hingang und von 0,43—1,33, also um ca. das 3fache beim Rückgang. Auch hier gilt dasselbe, was bei dem Kurbelviereck ausgeführt war, daß in Wirklichkeit die Geschwindigkeit der Kurbelschleife vom Punkte A an allmählich zunimmt bis zur Mitte und dann wieder allmählich abnimmt, während in der Tabelle mittlere Geschwindigkeiten zwischen den Punkten 12, 23 usw. angenommen und ausgerechnet sind. Trotzdem geht auch aus dieser Berechnung die Ungleichförmigkeit der Bewegung deutlich hervor.

H. Die unrunden oder elliptischen Räder.

Werden zwei unrunde oder elliptische Räder, Fig. 58, derartig miteinander in Beziehung gebracht, daß im Brennpunkt O_1 des einen Rades R_1 eine sich drehende Welle befindet, um welche das Rad sich dauernd mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, im Brennpunkt O_2 des zweiten Rades dagegen eine Welle, welche angetrieben werden soll, und wird durch richtige Anordnung von Zähnen am Umfang beider Räder dafür Sorge getragen, daß beide Räder fortgesetzt miteinander in Berührung bleiben, sich „kämmen" oder sich so infolge der Verzahnung mitnehmen, daß ihre Umfangsgeschwindigkeit im jeweiligen Berührungspunkte stets dieselbe ist,

so ergibt sich aus der Betrachtung gleicher Drehwinkel für das treibende Rad, wenn man die entsprechenden Drehwinkel des getriebenen Rades aufzeichnet, ohne weiteres, daß die Geschwindigkeit des letzteren eine ungleichförmige ist.

Der Stellung O_1ABC des treibenden Rades, bei welcher der Drehwinkel AO_1C z. B. $= 30^0$ ist, entspricht beim getriebenen Rad die Stellung $A_1O_2C_1$, da der Bogen A_1BC_1 gleich dem Bogen ABC ist. Der zu diesem Bogen gehörige Drehwinkel ist aber beinahe gleich 180^0, genau $157^0\,30'$. Bei einer Drehung des treibenden Rades um nur 30^0 ist also der Drehwinkel des getriebenen Rades in der gleichen Zeit $5^1/_4$ mal so groß, also die Winkelgeschwindigkeit

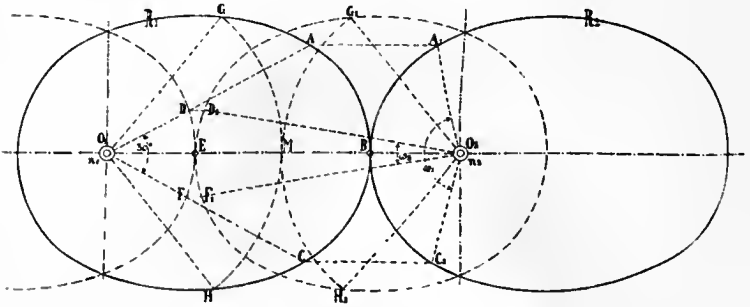


Fig. 58.

ebenfalls. Dieselbe nimmt nämlich von der Stellung $O_1A = O_2A_1$ bis zur Mittellage O_1BO_2 allmählich zu und erreicht in der Mittellage ihren größten Wert.

Bei der punktiert gezeichneten Lage beider Räder entspricht der Stellung DO_1F des treibenden Rades oder wieder einem Drehwinkel von 30^0 die Stellung $D_1O_2F_1$ des getriebenen Rades. Der dem Bogen D_1EF_1 zugehörige Drehwinkel ist $D_1O_2F_1 =$ ca. 20^0. Bei dieser Lage ist der Drehwinkel des getriebenen Rades nur $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ mal so groß als derjenige des treibenden, also auch die Geschwindigkeit nur $^2/_3$ so groß.

Nach dem für Zahnräder ganz allgemein gültigen Bewegungsgesetz verhalten sich die Tourenzahlen zweier Räder, also auch ihre Geschwindigkeiten umgedreht wie die Halbmesser.

Nimmt man nun an, daß für sehr kleine Bogenstücke die Radien O_1B und O_2B bzw. O_1E und O_2E konstant blieben, sich also nicht fortwährend änderten, wie dies bei den elliptischen Rädern in Wirk-

lichkeit der Fall ist, so kann man für diese Grenzstellungen die Verhältnisse der Geschwindigkeiten leicht berechnen.

Für die Stellung O_1BO_2 ist $O_1B = R_1$ und $O_2B = r_1$. Für die Stellung O_1EO_2 ist $O_1E = r_2$ und $O_2E = R_2$.

Im ersteren Falle ist die Umfangsgeschwindigkeit im Punkte B für beide Räder gleich, also:

$$\frac{2R_1\pi \cdot n_1}{60} = \frac{2r_1 \cdot \pi \cdot n_2}{60},$$

worin n_1 und n_2 die Tourenzahlen der Räder sind, wenn man vorübergehend für beide Räder ein konstantes Verhältnis der Halbmesser voraussetzen würde. Daraus folgt

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{R_1} \text{ und } n_2 = \frac{R_1}{r_1} \cdot n_1.$$

Für die zweite Stellung ist $2R_2 \cdot \pi \cdot n_2 = 2r_2 \cdot \pi \cdot n_1$, also

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{r_2} \text{ und } n_2 = \frac{r_2}{R_2} \cdot n_1.$$

Ist z. B. $r_1 = r_2 = 190$ mm, $R_1 = R_2 = 550$ mm, und $n_1 = 120$ Touren in der Minute, so folgt

für die erste Stellung O_1BO_2

$$n_2 = \frac{R_1}{r_1} \cdot n_1 = 2{,}895 \cdot 120 = 347{,}4 \text{ Touren},$$

für die zweite Stellung O_1EO_2

$$n_2 = \frac{r_2}{R_2} \cdot n_1 = 0{,}346 \cdot 120 = 41{,}5 \text{ Touren}.$$

Das Verhältnis der größten zur kleinsten Tourenzahl, also auch das Verhältnis der größten zur kleinsten überhaupt vorkommenden Geschwindigkeit ist somit $\frac{2{,}895}{0{,}346}$ oder $= \frac{347{,}4}{41{,}5} = 8{,}3$.

Mit dem vorliegenden Mechanismus der elliptischen Räder kann also die Geschwindigkeit des getriebenen Rades zwischen einer niedrigsten und — bei den gewählten Abmessungen — 8,3 mal so großen Geschwindigkeit verändert werden. Allerdings sind diese Geschwindigkeiten nur Grenzwerte und nimmt die Geschwindigkeit in der einen Hälfte der Umdrehung von der niedrigsten zur größten Geschwindigkeit fortwährend zu, während der anderen Hälfte der Umdrehung fortwährend ab. Die Geschwindigkeiten beider Räder sind zweimal bei einer Umdrehung einander gleich, und zwar dann, wenn die Halbmesser O_1G und O_2G_1 bzw. O_1H und O_2H_1 in die Mittellage, also in den Berührungspunkt M kommen. Für

diesen Moment ist $O_1M = O_2M$, also sind die beiden Halbmesser, demnach auch die Geschwindigkeiten, einander gleich.

Der Mechanismus der unrunden Räder findet vielfache Anwendung bei Maschinen, welche abwechselnd eine rasche und eine langsame Bewegung ausführen sollen, also zu ähnlichen Zwecken wie die oszillierende Kurbelschleife, so z. B. für Metallhobelmaschinen mit langsamem Arbeitsgang und raschem Rück- oder Leergang.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegung der materiellen Körper.

3. Kapitel.

Das d'Alembert'sche Prinzip.

Jeder materielle Körper setzt sich aus einer bestimmten, wenn auch sehr großen Anzahl sehr kleiner Teile, materieller Punkte, zusammen. Die Bewegung eines materiellen Körpers läßt sich daher bestimmen, wenn man die Bewegungen der einzelnen Punkte des Körpers kennt. Da jedoch beim festen Körper alle materiellen Punkte starr miteinander verbunden sind, so genügt es, wenn man die Bewegungsgesetze eines besonderen Punktes betrachtet, welcher an Stelle aller Einzelpunkte gesetzt werden kann, des Schwerpunktes des Körpers.

Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Massensystems gehen alle Punkte parallel zueinander und parallel zum Schwerpunkt geradlinig fort.

Bei der Drehung eines Massensystems um eine feste Drehachse haben alle Punkte gleichen Abstandes von derselben die gleiche Bewegung und kann die Drehung des ganzen Systems auf die Drehung des Schwerpunktes um die feste Drehachse zurückgeführt werden.

Der allgemeinste Fall der Bewegung im Raume ist nun die Kombination einer fortschreitenden und einer drehenden Bewegung. Auch für diese Bewegung gilt also das vorstehend Gesagte, da sich die Bewegung zuerst in eine fortschreitende und dann in eine drehende Bewegung zerlegen läßt.

Das d'Alembert'sche Prinzip, welches hier jedoch nicht mathematisch abgeleitet werden kann, stellt nun die Grundgleichung dar, nach welcher ein System von Massenpunkten sich bewegen muß.

Es unterscheidet folgende vier Arten von Kräften, welche auf jeden einzelnen Punkt des Massensystems wirken.

Denkt man sich in Fig. 59 die äußeren Kräfte P_1, P_2, P_3 usw., welche auf die Massenpunkte m_1, m_2, m_3 usw. des Massensystems oder materiellen Körpers wirken, aufgefaßt als die Resultierende zweier Komponenten, so bewirkt die eine Gruppe derselben eine Beschleunigung nach bestimmter Richtung. Sie sind mit $m_1 \cdot p_1$, $m_2 \cdot p_2$, $m_3 \cdot p_3$ usw. bezeichnet, worin m_1, m_2, m_3 usw. die Massen der materiellen Punkte repräsentieren. Diese Kräfte seien die Ursachen der Bewegung und heißen die wirksamen oder beschleunigenden Kräfte. Die anderen Komponenten Q_1, Q_2, Q_3 usw. jedoch kommen nicht zur Wirkung, da sie keine Bewegung erzeugen. Sie heben sich gegenseitig im Innern des Massensystems auf und heißen die verlorenen Kräfte. Hebt man ferner noch die wirksamen Kräfte, $m_1 p_1$ usw., durch gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte, wie es beim Punkte m_1 durch die Kraft $-m_1 p_1$ geschehen ist, auf, so hat man ein weiteres System von Kräften, welche die negativ genommenen wirksamen Kräfte oder die Trägheitskräfte heißen.

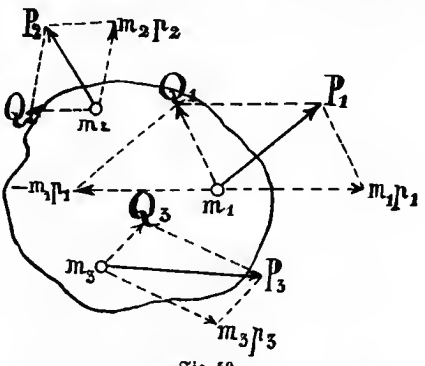


Fig. 59.

Das d'Alembert'sche Prinzip läßt sich nun zunächst in folgendem Satze ausdrücken:

„Wenn ein System von Punkten (Massensystem materieller Körper) sich unter dem Einfluß äußerer Kräfte im Raume fortbewegt, so heben sich die verlorenen Kräfte jederzeit auf oder sind untereinander im Gleichgewicht."

Man kann nun aber auch Q_1 noch als die Resultierende der äußeren Kraft P_1 und der negativ genommenen wirksamen Kraft oder der Trägheitskraft auffassen. Da nun alle verlorenen Kräfte Q_1, Q_2 usw. im Gleichgewicht sind, so sind es auch die äußeren Kräfte mit den negativ genommenen wirksamen Kräften oder

den Trägheitskräften. Man erhält dann folgende Ausdrucksform des d'Alembert'schen Prinzips:

„Wenn ein System von Massenpunkten (Massensystem materieller Körper) sich unter dem Einfluß äußerer Kräfte im Raume fortbewegt, so sind die äußeren Kräfte (ΣP) im Gleichgewicht mit den, negativ genommenen, wirksamen Kräften oder den Trägheitskräften ($\Sigma m_1 p_1$)."

Hieraus folgt sofort, daß sich jede Aufgabe der Dynamik auf die Gesetze der Statik zurückführen läßt, da der obige Lehrsatz vom Gleichgewichtszustand zwischen den äußeren und den Trägheitskräften spricht.

Der obige Lehrsatz rührt von dem französischen Gelehrten d'Alembert[1]) her, welcher denselben im Jahre 1742 der Pariser Akademie der Wissenschaften vorlegte und 1743 in seinem Buche Traité de mécanique zuerst veröffentlichte.

In einer erweiterten Schreibweise stellt der d'Alembert'sche Satz die Grundgleichung der Mechanik dar, indem er in allgemeinster Form alle Fälle der Bewegung und des Gleichgewichts eines beliebigen Systems von materiellen Punkten umfaßt.

Aus den mathematischen Entwickelungen der d'Alembert'schen Grundgleichungen ergibt sich endlich noch der folgende Satz:

„Es ändert an den Bewegungsgesetzen nichts, wenn der Schwerpunkt als der Versammlungspunkt aller Massenpunkte angesehen und die Bewegung eines Massensystems ersetzt wird durch diejenige des Schwerpunktes desselben."

Man kann daher alle, auf den materiellen Punkt bezüglichen Gesetze und Gleichungen auf den materiellen Körper anwenden, wenn man den letzteren durch seinen Schwerpunkt ersetzt denkt.

4. Kapitel.

Die Arbeit der Kräfte.

Während bisher nur von den Bewegungsgesetzen der Kräfte die Rede war, soll im folgenden ein Begriff näher untersucht werden, welcher mit zu den wichtigsten der Mechanik gehört und sich mit dem Resultate der Bewegung einer Kraft auf bestimmter Bahn beschäftigt, derjenige der Arbeit.

1) Jean Lerond d'Alembert, geb. 1717 zu Paris, gest. 1783 daselbst, Mitglied der Academie française 1741.

Man bezeichnet damit das Resultat der Wirkung einer Kraft auf einem bestimmten Wege.

Bezeichnet man wieder, wie früher, mit P eine ihrer Intensität, Stärke oder Größe und ihrer Richtung nach unveränderliche Kraft und mit s den vom bewegten Körper oder seinem Schwerpunkt bei der Bewegung in der Richtungslinie der Kraft zurückgelegten Weg, so ist die von der Kraft hierbei verrichtete Arbeit das Produkt aus der Kraft und dem Wege oder

$$A = P \cdot s.$$

Fällt die Kraftrichtungslinie nicht mit dem Wege zusammen, so ist die Arbeit das Produkt aus der Kraft und der Projektion des Weges auf die Kraftrichtung.

Bezeichnet α den Winkel zwischen dem Wege und der Kraftrichtung, so ist diese Projektion $s \cdot \cos \alpha$ und daher

$$A = P \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Da, wie oben ausgeführt, bei technischen Problemen die Kraft stets in Kilogrammen, der Weg in Metern angegeben wird, so wird die Arbeit als Produkt beider Größen in Meterkilogrammen gemessen.

Ist z. B. $P = 10$ kg und $s = 7{,}5$ m, so ist die Arbeit, welche diese Kraft beim Durchlaufen dieses Weges verrichtet hat,

$$A = 10 \cdot 7{,}5 = 75 \text{ mkg}.$$

Die Einheit der Arbeit ist daher ein Meterkilogramm, d. h. die Arbeit, welche eine Kraft von 1 kg auf dem Wege von 1 m verrichtet.

Im absoluten Maßsystem, von welchem bereits in der Einleitung zur Dynamik[1]) gehandelt wurde, ist die Einheit der Kraft die Dyne, die Längeneinheit das Zentimeter, die Arbeitseinheit das Erg, also jene Arbeit, welche eine Dyne auf dem Wege eines Zentimeters verrichtet.

Die Dyne ist nun definiert durch denjenigen Druck, den $^1/_{981}$ Gramm auf seine Unterlage ausübt; daher ist

$$1 \text{ Erg} = \frac{1}{981} \text{ cmg (Zentimetergramm)}.$$

Da nun 1 g = 981 Dynen ist, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem absoluten und metrischen oder technischen Maßsystem folgendermaßen:

$$1 \text{ mkg} = 100 \text{ (cm)} \cdot 1000 \text{ (g)} \cdot 981 \text{ (Dynen)} = 981 \cdot 100\,000 = 9{,}81 \cdot 10^7 \text{ Erg}.$$

1) S. oben S. 52.

Bayerische Staatsbibliothek München

Die Größe 10^7 Erg ist im absoluten Maßsystem mit 1 Joule[1]) bezeichnet worden, so daß auch 1 mkg = 9,81 Joule oder umgekehrt 1 Joule $= \frac{1}{9{,}81}$ mkg = 0,102 mkg ist.

Bei den bisherigen Beobachtungen war die Zeit, während welcher der bestimmte Weg zurückgelegt wurde oder die Geschwindigkeit des Körpers in der Sekunde, mit der er sich unter der Wirkung der Kraft fortbewegte, gar nicht berücksichtigt.

Das Produkt der Wirkung der Kraft auf einen bestimmten Weg in bestimmter Zeit nun oder das Produkt aus einer Kraft und einer gewissen Geschwindigkeit („Kraft mal Weg durch die Zeit") heißt nun die Leistung, Arbeitsstärke oder der Effekt einer Kraft und wird ausgedrückt, da die Zeiteinheit die Sekunde ist, durch den Ausdruck

$$E = \frac{P \cdot s}{t} \text{ in Sek./mkg.}$$

Einige Beispiele[2]) mögen zunächst zur Erklärung dienen.

Soll eine bestimmte Last, z. B. ein Baustein oder ein eiserner Träger oder Dachbalken vom Erdboden auf ein Baugerüst gehoben werden, so hat der Arbeiter, welcher diese Last mit Hilfe einer Hebevorrichtung (Flaschenzug oder Winde) zu heben hat, diese Hebung in einer bestimmten Zeit auszuführen. Ist z. B. die zu hebende Last = 500 kg, die gesamte Hubhöhe = 10 m und die Zeit, in welcher die Last auf diese Höhe gehoben werden soll, 5 Minuten = 300 Sekunden, so berechnet sich die Leistung nach der Gleichung

$$E = \frac{500 \cdot 10}{300} \sim 17 \text{ Sek./mkg.}$$

In Wirklichkeit ist indessen die Arbeitsleistung infolge der Reibungswiderstände des Seiles in dem Flaschenzuge und der Rollen desselben in ihren Lagern größer.

Ein anderes Beispiel ist die Hebung einer bestimmten Wassermenge in bestimmter Zeit auf eine gewisse Höhe. Soll z. B. ein Arbeiter an einer Pumpe in der Minute 120 l (= 120 kg) Wasser 4 m hoch pumpen, so erfolgt die Berechnung der theoretischen Leistung nach derselben Gleichung $E = \frac{120 \cdot 4}{60} = \frac{480}{60} = 8$ Sek./mkg.

Die wirkliche Leistung ist auch hier infolge der Widerstände des Wassers beim Durchgang durch die Ventile und durch die Rohr-

1) Sprich Dschaul.

2) Aus: v. Ihering, Maschinenkunde für Chemiker im Handbuch der Angewandten Physikalischen Chemie, Bd. III. S. 7. Leipzig. J. A. Barth. 1906.

leitung, der sogenannten hydraulischen Widerstände, und infolge der Reibung des Pumpenkolbens in der Pumpe und der sonstigen Widerstände der Pumpe wesentlich größer.

Für größere Arbeitsleistungen ist eine besondere Einheit, die Pferdestärke, vereinbart worden und versteht man darunter jene Leistung, welche imstande ist, in einer Sekunde 1 kg 75 m hoch oder 75 kg 1 m hoch zu heben, oder

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ Sek./mkg}.$$

Im absoluten Maßsystem ist die Einheit der Leistung das Sekunden-Erg, die größere Einheit das Watt $= 10^7$ Sek./Erg $= 1$ Sekunden-Joule.

Der Zusammenhang zwischen beiden Maßsystemen ist wieder einfach durch folgende Gleichungen gegeben.

$$1 \text{ Sek./mkg} = 9{,}81 \text{ Sek./Joule} = 9{,}81 \text{ Watt}.$$

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ Sek./mkg} = 75 \cdot 9{,}81 = 735{,}75 \sim 736 \text{ Watt}.$$

$$1 \text{ Watt} = \frac{1}{9{,}81} \text{ Sek./mkg} = 0{,}102 \text{ Sek./mkg}.$$

$$1 \text{ Kilowatt (KW)} = 1000 \text{ Watt} = 0{,}102 \cdot 1000 = 102 \text{ Sek./mkg}$$

$$= \frac{102}{75} = 1{,}36 \text{ PS}.$$

Die nachstehende Tabelle[1]) bringt den Zusammenhang der beiden Maßsysteme untereinander und mit den Einheiten der Wärme und Elektrizität übersichtlich zur Anschauung.

Kraft (P) = Masse (m) mal Beschleunigung (p); $P = m \cdot p$;

G (Gewicht) $= m \cdot g$; $m = \frac{G}{g}$; $g = 9{,}81$ m/Sek. (Beschleunigung, Akzeleration der Schwerkraft).

Absolutes Maßsystem:

Einheiten: Zentimeter (cm), Sekunde (Sek.), Gramm-Masse m_0 = Masse eines Körpers, der in Paris 1 Gramm (g) wiegt oder eines Kubikzentimeters (cbcm) Wasser.

I. Mechanische Arbeit.

$$1 \overbrace{\text{Dyne}}^{\text{Kraft}} = \frac{1}{981} \text{ Gramm}. \quad — \quad 1 \text{ Gramm} = 981 \text{ Dynen}. \quad —$$

$$\overbrace{1 \text{ Erg} = 1 \text{ Zentimeter-Dyne}}^{\text{Arbeit im absol. Maßsystem}} = \text{Arbeit, welche 1 Dyne bei der Bewegung von 1 cm verrichtet.} \quad — \quad 1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ Erg}.$$

1) v. Ihering, Maschinenkunde f. Chemiker (s. oben S. 98), S. 9.

Arbeit im technischen Maßsystem = 1 Meterkilogramm = 1 mkg
= 100 (cm) · 1000 (Gramm) · 981 (Dynen) = 981 · 100 000
= 98 100 000 Erg = 9,81 · 10^7 Erg = 9,81 Joule.

Leistung im technischen Maßsystem = 1 Pferdestärke = 75 mkg in der Sekunde = 75 · 98 100 000 Erg in der Sekunde
= 7 357 500 Erg/Sek. = 735,75 · 10^7 Erg/Sek. = 735,75 Joule/Sek.

II. Mechanische Arbeit und Wärme.

1 Wärmeeinheit (Kalorie, WE) = 428 mkg · — 1 mkg
= $\frac{1}{428}$ WE. — 1 kleine Kalorie (Grammkalorie, cal) = $\frac{1}{1000}$ cal
= $\frac{1}{1000}$ WE = 0,428 mkg = 42 800 cmg

1 cal = 0,428 · 98 100 000 Erg = 41 986 800 Erg · — A = $\frac{1}{428}$
= 0,002336 WE = 2,336 cal = Wärmeäquivalent für 1 mkg oder Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit.

E = $\frac{1}{A}$ = 428 mkg = Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, mechanisches Wärmeäquivalent.

III. Mechanische Arbeit, Wärme und Elektrizität.

1 Volt-Ampere (VA) = 1 Watt (W) = 10^7 Erg/Sek.
1 mkg/Sek. = 9,81 · 10^7 Erg/Sek. = 9,81 Watt.

1 PS = 75 mkg/Sek. = 75 · 9,81 Watt = 735,75 ~ 736 Watt.
1 Watt = $\frac{1}{9{,}81}$ mkg/Sek. = 0,102 mkg/Sek. = 0,102 · 2,331 cal/Sek. = 0,23827 cal/Sek.

1 Kilowatt (KW) = 10^3 Watt = 102 mkg/Sek. = $\frac{102}{75}$
= 1,36 PS = 102 · 9,81 · 10^7 Erg/Sek. = 1000 · 10^7 Erg/Sek.
= 238 cal/Sek. = 0,238 WE/Sek.

Die in den vorigen Betrachtungen erörterten beiden Begriffe der Arbeit und Leistung sind nun nur zwei spezielle Formen eines umfassenderen, allgemeinen Begriffes, desjenigen der Energie, d. h. der Arbeitsfähigkeit oder des Arbeitsvermögens irgendeiner Kraft. Ganz allgemein bezeichnet man jede irgendwie mögliche Ursache von mechanischer Arbeit als Energie.

Julius Robert Mayer hat zuerst in allgemeinster Form nachgewiesen, daß durch Aufwenden mechanischer Arbeit sowohl Wärme,

als auch elektrische, magnetische, chemische Erscheinungen hervorgebracht werden können, und daß einer bestimmten Menge mechanischer Arbeit eine ganz bestimmte Menge der anderen Energieform entspricht. Für die Wärme und Elektrizität ist dieser Zusammenhang aus der vorstehenden Tabelle (S. 100) ohne weiteres zu ersehen.

Auf Grund seiner Untersuchungen kam J. R. Mayer zu dem von ihm zuerst aufgestellten Gesetze oder Prinzip von der Erhaltung der Energie, welches zum Ausdruck bringt, daß die Energie unzerstörbar und unvermehrbar ist. Wie die Materie, so kann auch die Energie die verschiedensten Formen annehmen, bleibt aber quantitativ immer dieselbe.

Die Änderung der Energie oder Arbeitsfähigkeit eines Körpers kann daher nur durch eine Energieaufnahme von außen oder auch eine Abgabe derselben nach außen erfolgen. Da es nun aber für das ganze Weltall kein Außen gibt, so folgt hieraus der fundamentale Lehrsatz:

Die Energie der Welt ist konstant.[1])

Hinsichtlich der Betätigung oder der Art der Wirkung der Energie sind nun noch zwei wesentliche Unterschiede zu machen, nämlich zwischen der potentiellen oder disponiblen Energie oder der Energie der Lage und der kinetischen, aktuellen Energie oder der Energie der Bewegung.

Die erstere Energieform kann man sich als die ruhende Energie vorstellen, also diejenige, welche noch nicht in äußerer, mechanischer Arbeit oder Wärme oder irgendeiner anderen Form nutzbar gemacht ist. Sie „schläft" gleichsam, ist sozusagen aufgespeichert, steht jedoch jederzeit zur Leistung bestimmter Arbeitsmengen zur Verfügung. In dem Augenblicke aber, in welchem sie „geweckt" oder ausgelöst wird, geht sie in die andere Energieform, die kinetische Energie über. Einige Beispiele werden diesen Unterschied noch leichter verständlich machen.

Das Gewicht oder die Feder einer aufgezogenen, aber stillstehenden Uhr stellt eine bestimmte Menge potentieller Energie dar, welche beim Ingangsetzen der Uhr in kinetische Energie umgesetzt wird.

Das schwingende Uhrpendel befindet sich in seiner höchsten oder ausgeschwungenen Lage im Zustand der potentiellen Energie,

1) Näheres s. Weyrauch, Grundriß d. Wärmetheorie, I. Hälfte. Stuttgart, 1905. S. 17 u. folg.

wodurch es imstande ist, eine neue Schwingung auszuführen. In der tiefsten oder lotrechten Lage dagegen hat es den Höchstwert seiner kinetischen Energie erreicht.

Das Wasser eines Teiches oder des Obergrabens einer Wasserkraftanlage oder eines hochgelegenen Gebirgssees stellt eine ganz bestimmte Menge potentieller Energie dar, welche durch das Wassergewicht und das sogenannte Gefälle bestimmt und meßbar ist.

In dem Augenblick, in welchem durch Öffnen des Absperrschützens des Teiches oder Obergrabens das Wasser zum Abfluß kommt, verwandelt sich seine potentielle Energie in kinetische Energie, welche beim Durchfluß durch eine Wasserkraftmaschine, z. B. eine Turbine, in mechanische Arbeit verwandelt wird.

Eine elektrische Akkumulatorenbatterie von bestimmter Zellenzahl stellt ferner ebenfalls eine ganz bestimmte Menge potentieller, jedoch nicht mechanischer, sondern elektrischer Energie dar, welche durch Einschalten der Batterie in den Stromkreis eines Elektromotors in kinetische Energie, speziell in mechanische Arbeit umgesetzt werden kann.

Endlich ist in jedem Kilogramm Steinkohle, in jedem Liter eines flüssigen Brennstoffes (Petroleum, Benzin oder Spiritus), in jedem Kubikmeter eines brennbaren Gases eine ganz bestimmte Menge potentieller Energie enthalten, welche durch Verbrennen der Brennstoffe in Wärme und mechanische Arbeit, also Energie der Bewegung umgesetzt werden kann.

Der mathematische Ausdruck für die kinetische Energie oder das Arbeitsvermögen eines Körpers ist

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$$

worin m die Masse desselben und v seine Geschwindigkeit ist. Man nennt diesen Wert auch die lebendige Kraft des bewegten Körpers. Dieselbe ist ausgedrückt in derselben Maßeinheit wie die Arbeit, also in mkg.[1])

Um einen Körper aus dem Ruhestand in eine bestimmte Geschwindigkeit zu versetzen, bedarf es einer bestimmten Arbeit, welche der vom Körper erreichten lebendigen Kraft gleich ist, d. h.

$$L = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

1) $m = \frac{G(kg)}{g(m)}$, $L = \frac{1}{2} \cdot \frac{G(kg)}{g(m)} \cdot v(m) \cdot v(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{g}\right) \cdot G(kg) \cdot v(m)$ d. h. das Produkt von kg mal $m = m \cdot kg$.

Soll der Körper mit der Masse m von einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit (v_a) in eine größere (v_e) übergehen, so ist hierzu ebenfalls eine bestimmte Arbeit zu leisten, welche dem Unterschied der lebendigen Kräfte in den beiden Grenzzuständen entspricht, d. h.

$$L = \frac{m \cdot v_e^2}{2} - \frac{m \cdot v_a^2}{2}.$$

Dieser Übergang drückt sich aus in dem Lehrsatz:

„Der Zuwachs an kinetischer Energie oder lebendiger Kraft, welchen ein bewegter Körper erfährt, wenn er aus einer Lage in eine andere übergeht, ist gleich der von den wirkenden Kräften verrichteten Arbeit."

Dasselbe ist der Fall, wenn ein Körper von einer größeren auf eine kleinere Geschwindigkeit gebracht werden soll. Es ist ihm dann eine der Differenz der lebendigen Kräfte entsprechende Arbeitsgröße zu entziehen, was meistens durch Einschalten von Bewegungswiderständen (Bremsen) geschieht.

1. Beispiel. Welche Leistung in Sek./PS ist erforderlich, um einen Güterzug von 10 Wagen à 22 Tonnen in 1 Minute aus dem Stillstand auf eine Geschwindigkeit von 20 km/Std. zu bringen?

Das Gesamtgewicht ist

1. Lokomotive . .	=	55 t	= 55 000 kg
2. Tender	=	35 t	= 35 000 kg
3. Wagen 10×22	=	220 t	= 220 000 kg
		Summa 310 t	= 310 000 kg.

Die Endgeschwindigkeit ist $v = \frac{20 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = \frac{20000}{3600} = 5{,}55$ m/Sek.

Die in 1 Minute zu leistende Gesamtarbeit ist demnach

$$L = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{310000}{9{,}81} \cdot 5{,}55^2 = 480\,500 \text{ mkg},$$

mithin die Leistung in Sek./PS

$$N = \frac{480500}{60 \cdot 75} = \mathbf{107\ PS.}$$

In Wirklichkeit ist natürlich die von der Lokomotive außerdem noch zu leistende Arbeit wesentlich größer infolge der Eigenwiderstände der Lokomotive und der Wagen, des Luftwiderstandes usw.

2. Beispiel.[1]) Ein Schnellzug von 20 Wagen-Achsen von je 6 Tonnen Achsdruck soll mit 90 km Geschwindigkeit fahren. Wie groß ist die hierzu erforderliche Arbeitsstärke der Lokomotive?

Das Gewicht der Lokomotive und des Tenders beträgt zusammen $42 + 28{,}5 = 70{,}5$ t, dasjenige der Wagen à 6 t = 120 t, also das Gesamtzuggewicht $Q = 190{,}5$ t.

Nach Versuchen mit preußischen Normal-Betriebsmitteln beträgt der Widerstand für 1 t Zuggewicht bei Personenzügen $w_0 = 2{,}5 + 0{,}001\,V^2$ kg, worin V die Geschwindigkeit in km/Stdn. bezeichnet.

Es ist somit die erforderliche Zugkraft der Lokomotive

$$Z = Q \cdot w_0 = 190{,}5 \cdot (2{,}5 + 0{,}001 \cdot 90^2)$$
$$= 190{,}5\,(2{,}5 + 8{,}1) = 190{,}5 \cdot 10{,}6 = 2019 \text{ kg}.$$

Die Leistung der Maschine in PS ist somit

$$N = \frac{Z \cdot v_{sec}}{75} = \frac{2019 \cdot 90 \cdot 1000}{60 \cdot 60 \cdot 75}$$
$$= \frac{2019 \cdot 25}{75} = \frac{2019}{3} = \mathbf{673\ PS}.$$

3. Beispiel. Welche Arbeitsleistung ist erforderlich, um den im vorigen Beispiel beschriebenen Schnellzug in $1^1/_2$ Minuten von 60 km auf 90 km Geschwindigkeit zu bringen.

Die entsprechenden Geschwindigkeiten in der Sekunde sind

$$\frac{60 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = 16{,}66 \text{ m/Sek. und } 25 \text{ m/Sek.}$$

Die Arbeit in 1 Minute ist somit

$$L = \frac{1}{2} m\,(25^2 - 16{,}66^2) = \frac{1}{2}\frac{G}{g} \cdot 346$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{190500}{9{,}81} \cdot 346 = 3\,296\,000 \text{ mkg in } 1^1/_2 \text{ Min. oder } 90 \text{ Sek.},$$

also in Sek./PS $L = \frac{3\,296\,000}{90 \cdot 75} = \mathbf{488\ PS}.$

5. Kapitel.

Die Trägheitsmomente.

Der im vorigen Kapitel abgeleitete Ausdruck für das Arbeitsvermögen oder die lebendige Kraft eines bewegten Körpers nimmt für solche Körper, welche sich um eine feste Achse drehen, also

1) Nach Taschenbuch der „Hütte", 16. Aufl., 1896, Bd. II, S. 162.

für die drehende Bewegung, eine besondere Form an, auf welche hier noch näher einzugehen ist. Denkt man sich in dem Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

die Masse m des bewegten Körpers zusammengesetzt aus (unendlich) vielen Massenteilchen der einzelnen Körpermoleküle, z. B. m_1, $m_2 \ldots m_n$, deren Abstände von der Drehachse r_1, $r_2 \ldots r_n$ seien, und bezeichnet man mit w die Winkelgeschwindigkeit bei der Umdrehung des Körpers, d. h. die Geschwindigkeit in Abstand $r = 1$[1]), so ist für jedes Massenteilchen, die absolute Geschwindigkeit v gleich dem Produkt aus dem Abstand r von der Drehachse und der Winkelgeschwindigkeit, also $v_1 = r_1 \cdot w$, $v_2 = r_2 \cdot w$, usw.

Man erhält somit den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} m_1 \cdot r_1^2 w^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r_2^2 w_2 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} m_n \cdot r_n^2 \cdot w^2 = \frac{w^2}{2} \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots m_n \cdot r_n^2).$$

Der Klammerausdruck stellt die Summe der Produkte aller Massenteilchen mit den Quadraten ihrer Abstände von der Drehachse dar und schreibt man die obige Gleichung auch

$$L = \frac{w^2}{2} \cdot \Sigma(m \cdot r^2).$$

Man nennt nun die Summe $\Sigma(m \cdot r^2)$ das Trägheits- oder Drehungs- oder Massenmoment des Körpers in bezug auf die Drehachse. Man erhält also den einfachen Ausdruck

$$L = \frac{w^2}{2} \cdot J,$$

worin J das Trägheitsmoment ist.

Für symmetrische Flächen und Körper ist das Trägheitsmoment $J = M \cdot i^2$, worin M die gesamte, im Schwerpunkt vereinigte Masse des Körpers und i der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist und der Trägheitsarm der Masse heißt.

Beispiel. Es ist das Arbeitsvermögen eines gußeisernen Ringes von 2 m Durchmesser und rechteckigem Querschnitt von 16 cm Höhe und 12 cm Breite zu berechnen, welcher sich mit einer Geschwindigkeit von 240 Touren in der Minute um seine Drehachse an 6 (gewichtlos gedachten) Armen dreht.

---

1) Vgl. auch oben S. 73.

Das Gewicht des Körpers berechnet sich zu

$$G = V \cdot \gamma,$$ worin V das Volumen des Ringes,

γ das Gewicht eines Kubikmeters Gußeisen = 7250 kg ist. Zunächst ist:

$$V = [2^2 - (2 - 2 \cdot 0{,}16)^2] \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}12 = [4 - 2{,}822] \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}12$$

$= 0{,}111$ cbm, daher $G = 0{,}111 \cdot 7250 = 804{,}75$ kg ~ 805 kg,

daher $M = \frac{G}{g} = \frac{805}{9{,}81} = 82.$

Die Winkelgeschwindigkeit ist $w = \frac{\pi \cdot n}{30}$[1]) $= \frac{3{,}14 \cdot 240}{30} = 3{,}14 \cdot 8$

$= 25{,}133$ m/Sek.

Der Trägheitsmoment berechnet sich zu $J = M \cdot i^2$.

Der Schwerpunkt des Rechteckes liegt in der Mitte desselben, also um $(1000 - \frac{160}{2}) = 920$ mm oder 0,92 m von der Drehachse entfernt, woraus folgt

$$J = 82 \cdot 0{,}92^2 = 69{,}4$$

und daraus

$$L = \frac{w^2}{2} \cdot J = \frac{25{,}133^2}{2} \cdot 69{,}4 = 22\,034{,}5 \sim 22\,035 \text{ mkg}.$$

Die Bestimmung der Trägheitsmomente erfolgt entweder rechnerisch oder zeichnerisch oder für zusammengesetzte Flächen und Körper durch Ermittelung der einzelnen Trägheitsmomente und Übertragung derselben auf ein resultierendes Trägheitsmoment.[2])

6. Kapitel.

Die Reibung.

Bei den bisherigen Betrachtungen waren lediglich die bewegenden Kräfte und ihr Einfluß auf die Geschwindigkeit eines Körpers ohne Berücksichtigung irgendwelcher äußerer Widerstände untersucht worden. In Wirklichkeit sind jedoch stets solche Widerstände vorhanden, deren wichtigste der Luftwiderstand und der Reibungswiderstand sind. Der erstere, welcher namentlich bei sehr raschen Bewegungen der Körper, bei der Wurfbewegung, bei den Dreh-

1) S. oben S. 73.

2) Näheres hierüber in Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik; I. Teil, Theoret. Mechanik. Fünft. Abschn. 2. Kap. Die Lehre v. d. Trägheitsmomenten.

bewegungen vieler Körper auftritt, soll hier nicht weiter untersucht werden.

Dagegen spielt die Reibung bei allen Bewegungen der festen Körper auf anderen Körpern eine sehr wichtige Rolle und darf, um den wirklichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, nicht unberücksichtigt bleiben. Da kein noch so glatter Körper von Unebenheiten ganz frei ist, so wird bei der Berührung zweier Körper infolge des Eigengewichtes des auf den unterstützenden Körper drückenden Körpers stets ein gewisses Eindrücken des einen in den anderen an der momentanen Berührungsstelle stattfinden und dadurch der freien Bewegung ein mit der Unebenheit des einen oder beider Körper zunehmender Widerstand entgegengesetzt, zu dessen Überwindung außer der theoretisch erforderlichen, die Bewegung erzeugenden Kraft noch eine Zusatzkraft erforderlich ist, so daß unter Berücksichtigung des Reibungswiderstandes die zur Bewegung erforderliche Kraft größer ist.

Die Reibung wirkt stets der Bewegungsrichtung entgegen, kann also als eine der bewegenden Kraft entgegengesetzt gerichtete Kraft von bestimmter Größe angenommen werden.

Man unterscheidet die Reibung der Ruhe und die Reibung der Bewegung.

Die erstere findet bei allen einander berührenden Körpern statt. Sie ist abhängig vom Gewicht, also dem Normaldruck des auf die Unterlage drückenden Körpers, und von der Oberflächenbeschaffenheit beider Körper. Infolge dieser Reibung bleibt ein Körper auf einer schrägen oder schiefen Ebene[1]) so lange ruhen, als der Steigungswinkel dieser Ebene einen bestimmten Wert nicht überschreitet, welcher von der Oberflächenbeschaffenheit, also auch dem Material, aus welchem die Körper bestehen, abhängt.

Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel der Ruhe oder Grenzwinkel der Reibungsstützung.

Diese Reibung spielt eine gewisse Rolle bei den Baukonstruktionen, so vor allem in der Theorie der Gewölbe.

Die Reibung der Bewegung zerfällt in zwei Hauptgruppen, die gleitende und die rollende oder wälzende Reibung.

Die gleitende Reibung tritt auf, wenn ein Körper auf einem anderen gleitet, d. h. sich so bewegt, daß alle seine Punkte sich in parallelen Linien bewegen.

---

1) S. oben S. 78.

Die rollende Reibung tritt auf, wenn ein Körper auf einem anderen rollt oder sich auf ihm abwälzt.

In beiden Fällen wird die Reibung erzeugt durch den Normaldruck des bewegten Körpers auf den ruhenden Körper oder die Unterlage.

Man drückt dies aus durch die Gleichung

$$W = \mu \cdot N, \text{ worin}$$

W den Reibungswiderstand in kg, N den Normaldruck in kg und μ den Reibungskoeffizienten bezeichnet.

1. Die gleitende Reibung.

Wird bei einem auf horizontaler Ebene ruhenden Körper die auf ihn parallel zu dieser Ebene oder schräg dazu gerichtete wirkende Kraft größer als der Reibungswiderstand W, so gleitet der Körper in der Richtung der Wirkung der äußeren Kraft auf der Ebene hin.

Beispiele der gleitenden Reibung sind:

Die Gradführungen an Dampfmaschinen, Lokomotiven, Pumpen usw., die Bewegungen vieler Arbeitstische, z. B. der Metall-Hobelmaschinen auf ihren Unterlagen (Betten), die Bewegung eines Schlittens auf der schneebedeckten Straße, die Bewegung eines Schlittschuhläufers auf einer Eisbahn, die Bewegung einer Kolbenstange in der sogenannten Stopfbüchse, die Bewegung einer Schraube in der Schraubenmutter, die Bewegung von Zapfen in ihren Lagern, die Bewegung eines auf und nieder gehenden Schlittens oder Stempels bei vielen Werkzeugmaschinen, bei Pressen, Lochmaschinen, Stanzen, Fallhämmern, kurz eine fast unbegrenzte Menge von Anwendungen bei Maschinen und Werkzeugen aller Art.

Die Werte der Reibungskoeffizienten finden sich in den Lehrbüchern der Mechanik, in den Ingenieurkalendern usw., und muß bei der großen Menge dieser Koeffizienten auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden.

2. Die rollende Reibung.

Sie tritt auf bei allen Fortbewegungen von Fuhrwerken auf festen Bahnen und Straßen, so der Eisenbahnbetriebsmittel, der Straßenfuhrwerke aller Art und bei der Umdrehungsbewegung einer Walze, sowohl einer freien als auch einer belasteten.

In Fig. 60 ist zunächst der Fall dargestellt[1]), bei welchem ein runder Körper (Rad, Rolle, Walze, Kugel) auf horizontaler Ebene durch eine im Mittelpunkt O angreifende Kraft P fortbewegt wird, welcher Fall bei den, durch eine, an der Spitze des Fuhrwerkes wirkende, äußere Zugkraft fortbewegten Fuhrwerken, z. B. Eisenbahn- und Straßenbahnwagen, gewöhnlichen Pferdefuhrwerken, stattfindet. Zur Drehung um den momentanen Stützpunkt ist ein Kräftepaar, dessen Größe von der Reibung und der Belastung Q abhängt, zu überwinden. Das Moment desselben ist $M = Q \cdot f$, worin f den Hebelarm dieses Momentes darstellt (in cm). Dasselbe muß gleich dem äußeren Drehmoment sein, woraus folgt

$$P \cdot r = Q \cdot f.$$

Wirkt die Kraft P nicht im Mittelpunkt oder Schwerpunkt der Walze, sondern am Umfang, Kraft P_1, Fig. 60, so gilt die Gleichung

$$P_1 \cdot 2r = Q \cdot f.$$

Der Hebelarm f ist z. B. für die Bewegung von Eisen auf Eisenschienen (oder Stahl auf Stahl)

$$f = 0{,}05 \text{ cm}.$$

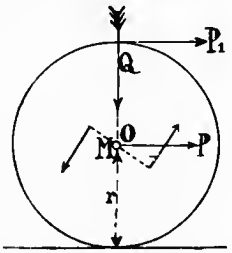


Fig. 60.

Beispiel. Für einen Güterzug von $Q = 750$ t (150 Achsen à 5 t) Zuggewicht, 36 t Lokomotivgewicht und 28,5 t Tendergewicht ist der Reibungswiderstand für die rollende Reibung auf ebener Bahn zu berechnen.

Für die Wagenachse ist $Q = 5$ t, also pro Rad 2,5 t = 2500 kg. Es ergibt sich somit $P = Q \cdot \frac{0{,}05}{49} = 0{,}00\,102 \cdot Q = 2{,}55$ kg, also Z_1 für die Wagen $= 300 \cdot 2{,}55 = 765$ kg, wenn der Halbmesser der Räder zu 0,49 m = 49 cm angenommen wird.

Für die Lokomotive zu 3 Achsen ist die Belastung pro Rad $= \frac{36}{3 \cdot 2} = 6$ t, also $P = 6000 \cdot \frac{0{,}05}{65} = 4{,}61$, also die Zugkraft Z_2 für 6 Räder zu $4{,}61 \cdot 6 \sim 28$ kg bei einem Radhalbmesser von 0,65 m = 65 cm.

Für den dreiachsigen Tender ist der Raddruck $= \frac{28{,}5}{6} = 4{,}75$ t, also $P = \frac{0{,}05}{49} \cdot 4750 = 0{,}001\,02 \cdot 4750 = 4{,}85$, also die Zug-

1) Nach Hüttentaschenbuch, XVI. Aufl., Bd. I, S. 211.

kraft $Z_3 = 6 \cdot 4{,}85 = 29{,}1$ kg, mithin $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 765 + 28 + 29{,}1 = 822$ kg nur für die Überwindung der rollenden Reibungen.

Die wirklich erforderliche Zugkraft hat jedoch vor allem auch die Zapfenreibungen der Zapfen in den Lagern, die Widerstandsarbeit der Lokomotive, die sonstigen Widerstände des Zuges infolge der Schienenstöße, der Kurven, Steigungen, den Luftwiderstand usw. zu überwinden und ist daher wesentlich größer.

Bei der in Fig. 61 dargestellten Anordnung wird die Last Q auf der Walze W fortgeschoben. Hierbei ist das Moment $P \cdot 2r = P \cdot d$ erforderlich, um das Reibungsmoment M der Walze zu überwinden.

Das letztere setzt sich zusammen aus dem Reibungsmoment für die Belastung auf der Walze und jenem für die Walze auf der ebenen Bahn. Der Reibungskoeffizient der letzteren sei f, derjenige der ersteren f_1.

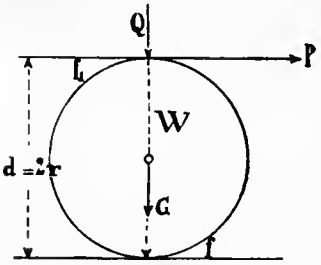


Fig. 61.

Man erhält somit die Gleichung

$$P \cdot d = M = Q \cdot f_1 + (Q + G) \cdot f,$$

worin G das Gewicht der Walze selbst ist.

Beispiel. Ein Stein von 1000 kg Gewicht soll auf zwei Walzen von je 20 cm Durchmesser fortbewegt werden. Die Walze wiegt 20 kg.

Der Reibungskoeffizient f_1 ist $= 0{,}08$, derjenige $f = 0{,}09$.

Es ist die Kraft P zu berechnen, welche erforderlich ist, um den Stein fortzubewegen.

Da zwei Walzen vorhanden sind, so kommt auf jede Walze eine Belastung von 500 kg. Es ist somit

$$P \cdot d = 500 \cdot 0{,}08 + (500 + 20) \cdot 0{,}09 = 86{,}8$$

also $P = \frac{86{,}8}{20} = 4{,}34$ kg, also für beide Walzen zusammen

$$P_0 = 2 \cdot 4{,}34 = 8{,}68 \sim 9 \text{ kg}.$$

7. Kapitel.

Die Lehre vom Stoß.

Wenn zwei Körper im Raume ihre Entfernung voneinander fortgesetzt so ändern, daß dieselbe immer kleiner wird, so stoßen dieselben schließlich gegeneinander. Hierbei können zwei Fälle vorkommen, indem nämlich entweder nur der eine Körper sich bewegt und der andere stillsteht, oder beide Körper sich gegeneinander bewegen.

Ersteres ist z. B. der Fall, wenn ein Körper (Ball, Kugel o. dgl.) gegen eine feste Wand trifft, letzteres, wenn zwei in Bewegung befindliche Eisenbahnwagen mit ihren Puffern zusammenprallen.

Bezüglich der Richtung des Stoßes unterscheidet man den zentrischen und exzentrischen Stoß. Bei ersterem bewegen sich beide Körper in der Richtung ihrer Schwerpunktsverbindungslinie gegeneinander, bei letzterem fällt die Stoßlinie außerhalb der Schwerpunktsverbindungslinie. Man unterscheidet ferner noch den geraden und den schiefen Stoß. Bei ersterem fallen die Bewegungsrichtungen beider Körper in die Stoßlinie, bei letzterem bilden die Bewegungsrichtungen miteinander einen Winkel.

Bezüglich der Wirkung der Elastizität der beiden aufeinandertreffenden Körper unterscheidet man endlich noch den vollkommen unelastischen Stoß, den vollkommen elastischen Stoß und den unvollkommen elastischen Stoß.

Am nächsten der Wirklichkeit kommt der letzte Fall, da es weder vollkommen unelastische Körper noch vollkommen elastische Körper gibt.

Für die Berechnung der Stoßformeln sind die Massen und Geschwindigkeiten der beiden bewegten Körper maßgebend.

Bezeichnen M_1 und M_2 die Massen der beiden Körper, v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten vor dem Stoß, c_1 und c_2 dieselben nach dem Stoß, so ist die Hauptgleichung zwischen diesen Größen folgende:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2.$$

Man nennt den Wert $M_1 v_1$ des bewegten Körpers seine Bewegungsgröße und erhält daher den Satz:

Die Summe der Bewegungsgrößen beider Körper vor und nach dem Stoß bleibt konstant.

Dies ist allerdings nur theoretisch richtig, da in Wirklichkeit infolge der Reibung der bewegten Körper auf ihrer Bahn, der unvollkommenen Elastizität, des Luftwiderstandes, und schließlich der beim Zusammenstoß erzeugten Wärme ein Teil der Bewegungsgrößen verloren geht.

Beim unelastischen Stoß gehen nach dem Stoß beide Körper mit der gleichen Geschwindigkeit c weiter, man hat die Gleichungen

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = c \cdot (M_1 + M_2) \text{ und}$$

$$c = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}.$$

Der Arbeitsverlust, der hierbei auftritt, ist proportional dem Unterschiede der Geschwindigkeiten beider Körper und berechnet sich aus der Gleichung:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}\right)(v_1 - v_2)^2.$$

Beispiel. Die Gewichte der beiden bewegten Körper seien $G_1 = 100$ kg, $G_2 = 1000$ kg, ihre Geschwindigkeiten $v_1 = 8$ m/Sek., $v_2 = 3$ m/Sek. Es ist sodann $M_1 = \frac{G}{g} = \frac{100}{9{,}81} = 10{,}19$, $M_2 = \frac{1000}{9{,}81} = 101{,}9$, daher $c = \frac{10{,}19 \cdot 8 + 101{,}9 \cdot 3}{10{,}19 + 101{,}9} = \frac{387{,}2}{112{,}1} = 3{,}45$ m/Sek. und $L = \frac{1}{2}\frac{10{,}19 \cdot 101{,}9}{112{,}1}(8-3)^2 = 1157{,}75$ mkg.

Die Gleichungen für den vollkommen elastischen und unvollkommen elastischen Stoß hier wiederzugeben würde zu weit führen, da für dieselben die Lehren von der Elastizität der Körper und von den elastischen Formveränderungen in Betracht zu ziehen sind, auf welche hier nicht näher eingegangen werden kann.

Sachregister.

Absolutes Maßsystem 52, 97
Aeromechanik 2
d'Alembert'sches Prinzip 94
Algebraische Summe der Kräfte 23
Algebraische Summe der Momente 23
Angriffspunkt der Schwere 41
Anziehungskraft der Erde 3, 40
Arbeit 96
Arbeit, mechanische 99
Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit 100
Arbeitsfähigkeit 100
Arbeitsstärke 98
Arbeitsvermögen 100
Aufhängungspunkt 27
Ausschlag 75

Bahn 50
Balancier 16
Balancierdampfmaschine 89
Balkenträger 44
Balkenwage 17
Beispiele der Bewegungen 51
Belastungsmoment 46
Beschleunigung 57
— der Schwere 40, 41, 53
Bewegung 1
— der Himmelskörper 71
— freie 54
— gleichförmige 51
— periodische 71
— ungleichförmige 51
Bewegungsgröße 111
Bewegungsschema 53
Bielascher Komet 72
Brücke 19
Brückenwage 19, 20

Chemische Wage 17

Dezimalwage 19
Dimensionen im Maßsystem 52
Donatischer Komet 72
Drehmoment 12, 24
Drehungsmoment 104
Dreiecksfläche 42
Druckbeanspruchung 30, 35
Druckkraft 35
Dynamik 50
Dyne 53, 97

Ebene, schiefe 78
Effekt 98
Einteilung der Bewegungen 53
Einzelkraft 7
Elastizitäts- und Festigkeitslehre 50
Elliptische Räder 91
Elogationswinkel 75
Endgeschwindigkeit 63
Energie 100
— aktuelle 101
— der Bewegung 101
— der Lage 101
— disponible 101
— kinetische 101
— potentielle 101
Erg 97

Fachwerksbrückenträger 37
Fall, freier 62
Fallhöhe 62, 63
Flugbahn 65
Flugweite 65
Flugzeit 65
Freier Fall 62

Gauß und Weber 52
Geomechanik 2
Geradführung 82
Geschwindigkeit 51
Geschwindigkeitshöhe 63
Geschwindigkeitstabelle 56
Gewicht 40
Gleichgewicht 3
Gleitende Reibung 107
Gramm-Masse 99
Grundgleichung der Mechanik 96

Hängewerk 35
Halley'scher Komet 72
Hebebaum 14
Hebel 13
Horn 16
Hydraulik 2
Hydraulische Widerstände 99
Hydromechanik 2

Joule 98

Kalorie 100
Keil 81
Kilogramm 41, 52
Kilowatt 100
Knoten 27
Knotenpunkt 27
Königstein a. d. Elbe 63
Kometen 79
Komet von Biela 72
— — Donati 72
— — Halley 72
Komponente 7, 28
Kraft 2
— bewegende 2
— lebendige 102
Kraftmoment 12
Kräftepaar 24
Kräfte, parallele 22
Kräfteparallelogramm 6
Kreisbewegung 72
Kreispendel 75
Kreuzkopf 82
Kurbelschleife, oszillierende 88
Kurbelviereck 86

Lebendige Kraft 102
Leistung 98
Luftballon 63

Masse 40, 99
Massenmoment 104
Massenpunkt 54
Maßsystem, absolutes 52, 97, 99
Mayer, Jul. Robert 100
Mechanik 1
Mechanische Arbeit 99
Mechanisches Wärmeäquivalent 100
Menge 40
Meter 52
Meterkilogramm 100
Mittelkraft 6, 28
Moment 24
— negatives 12
— positives 12
— statisches 12
Momentenfläche 46, 47

Ort 1
Ortsveränderung 1
Oszillierende Kurbelschleife 89

Parallele Kräfte 22
Parallelogramm 43
Pendel 75
— einfaches 75
— materielles 75
— mathematisches 75
— Sekunden- 76
— physikalisches 75
Periode 83
Periodische Bewegung 71
Pferdestärke 99
Pol 27
Polstrahlen 27
Polygon 9
Prinzip von d'Alembert 94
— — der Erhaltung der Energie 101
Punkt, materieller 3

Quadrat 43

Räder, elliptische 91
— unrunde 91
Rechteck 43
Reibung 106
— der Bewegung 107
— der Ruhe 107
— gleitende 107, 108
— rollende 107, 108
— wälzende 107
Reibungsstützung 107
Reibungswinkel 107
Resultante 6
Resultierende 6
Römische Wage 18
Ruhe 1
Ruhezustand 1

Satteldach 36
Schell 41
Schiefe Ebene 78
Schlußlinie 30
Schraube 81
Schubkurbelmechanismus 82
Schwere 40
Schwerkraft 39
Schwerpunkt 41
Schwingungsdauer 75
Seilpolygon 29
Seilspannung 27
Sekunde 52
Sekundenpendel 76
Sonnenbewegung 1
Sprengwerk 36
Statik 1, 3
Statisches Moment 12
Steighöhe 65
Stephan 63
Stockschere 17
Stoß 111
— elastischer 111
— exzentrischer 111
— gerader 111
— unelastischer 111
Strebe 31

Tangentialkraft 73
Todpunkt, äußerer 83
— innerer 83
Träger 44
Trägheitskräfte 95
Trägheitsmoment 104
Trapez 43

Umlaufszeit 72
unendlich klein 51
Unrunde Räder 91

Verzögerung 51, 57
Vieleck, reguläres 44
Viereck 43
Volt-Ampere 100

Wälzende Reibung 107
Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit 100
Wärmeeinheit 100
Wage 17
— römische 18
Watt 100
Weg 50
Weißbach-Herrmann 106
Welle 25
Weyrauch 101
Widerstände, hydraulische 99
Wirkungsweise der Kräfte 4
Wurf, senkrechter 67
Wurfbewegung 65
Wurflinie 65
Wurfweite 65

Zapfen 25
Zeit 50
Zentesimalwage 19
Zentrifugalkraft 73
Zentripetalkraft 73
Zugbeanspruchung 30
Zugkraft 3, 30

Bayerische Staatsbibliothek München

Druck von G. B. Teubner in Dresden.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN.

Angewandte Mechanik. Von **John Perry**, F. R. S. Ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen nnd numerische nnd graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ingenieur **Rudolf Schick** in Köln. Mit 371 Figuren. [VIII nnd 666 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. ℳ 18.—

„Aus diesem Werke spricht ein Lehrer allerersten Ranges, der ausgedehnte Kenntnisse mit vollendeter Lehrkunst vereinigt. Er hat aus dem großen Wissensgebiete der technischen Mechanik viele hundert Beispiele zusammengetragen, an welchen er die Grundgesetze ansohanlich erläntert, und damit ein echtes Lehrbnch gsschaffen, dessen Übersetznng sich bald zahlreiche Frennde erwerben wird. Alle Darlegungen sind nnmittelbar anf den praktischen Gebranch zngeschnitten, nnd der mathematische Apparat ist in möglichst engen Grenzen gshalten; voransgesetzt wird lediglich die Kenntnie der niederen Analysis." **(Literarisches Zentralblatt.)**

„Keine einseitige Bevorzngung eines einzelnen Zweiges, keine Bevorsngung des Graphischen oder des Analytischen. In den Mittelpunkt des Unterrichts sind die einfachen, an Zahl nicht großen Grundlehren gestellt, nnd diese sind eingehend nnd gründlich demonstriert und angswandt. Der Geist, in dem das lebendig und originell geschriebene Bnch abgefaßt ist, verdient alle Anerkeunung." **(Dinglers polytechnisches Journal.)**

Drehkreisel. Von Professor **John Perry.** Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Übersetzt von Professor **August Walzel** in Brünn. Mit 58 Abb. im Text nnd einem Titelbild. [VIII nnd 125 S.] 8. 1904. In Leinwand geb. ℳ 2.80

Aus dem Inhalt: Wichtigkeit des Stndiume von Drehkreiseln. — Die Präzession oder das Vorrücken. — Der Grund der scheinbaren Steifigkeit sich drehender Körper. — Annahme einsr nenen Drehbewegung der Erde. — Einwirknng der Zentrifngalkraft. — Ursache der Hebnng des Kreisels. — Lösnng des Problems durch Thomson uud Blackbnrn. — Die vorrückende Bewegung (Präzession) der Erde. — Einfluß des möglicherweise flüssigen Znstandes des Erdinnern anf die Bewegungen der Erde. — Die Tätigkeit der Astronomen. — Beweis für die Aohsendrehnng der Erde dnrch den Gyrostaten. — Licbt, Magnetismns nnd Drehkreisel. — Polarisation dee Lichts. — Drehnng der Polarisationsebsne. — Sach- nnd Namenregister.

„. . . In der Kunst des volkstümlichen Vortrages haben die Engländer von jeher Meister besessen; ich brauche nnr auf Tyndalls Vorlesnngen nud anf Boys' ‚Seifenblasen', Vorlesungen über Kapillarität, hinzuweisen, um etwas jedem Leser dieser Zeitschrift Bskanntes zn nennen. Etwas dem Ähnliches liegt in dem kleinsn Perryschen Büchlein vor, in welchem die Kreiselvorgänge in überans anziehendsr nnd reizender Weise vorgeführt und in ihrer Bedentung dem Verständnis anch von Nichtphysiksrn näher gebracht werden. Es bedarf ksiner weiteren Worts als der obsn herangezogenen Vergleiche, um das Werkchen zn charakterisiren nnd zngleioh zu empfehlen." **(Physikalische Zeitschrift.)**

Vorlesungen über Technische Mechanik. Von Dr. **August Föppl**, Professor a. d. Technischen Hochschule zu München. In 6 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. **Einführung in die Mechenik.** 3. Auflage. Mit 103 Figuren. [XVI nnd 428 S.] 1905. ℳ 10.—

II. Band. **Graphische Statik.** 2. Auflage. Mit 176 Figuren. [XII nnd 471 S.] 1903. ℳ 10.—

III. Band. **Festigkeitslehre.** 4. Anflage. Mit 86 Figuren. [XVI nnd 426 S.] 1909. ℳ 10.—

IV. Band. **Dynamik.** 3., stark veränderte Anflage. Mit 71 Figuren. [VIII und 422 S.] 1909. ℳ 10.—

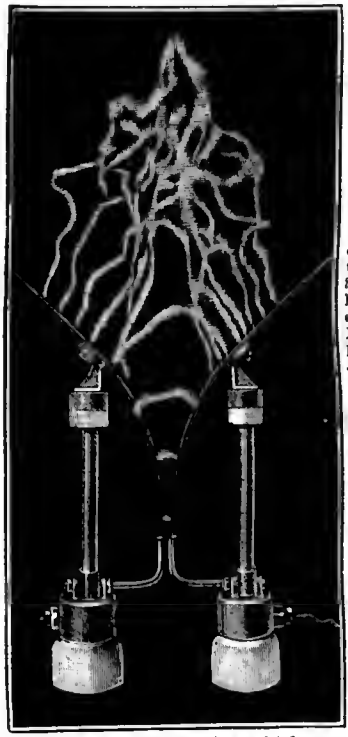
V. Band. **Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie.** Mit 44 Figuren. [XII und 391 S.] 1907. ℳ 10.—

VI. Band. **Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik.** Mit 30 Figuren. [XII und 490 S.] 1910. ℳ 12.—

„Mit Recht zählen die Föpplschen Lehrbücher über Mechanik zu den beliebtesten in der technischen Literatur. Der Grund ist wohl der, daß der Verfasser es versteht, sich ganz in den Geist des Lernenden hineinzuversetzen, mit ihm gemeinsam an jede neue Aufgabe heranzutreten, und dies nicht nur von einer Seite zu fassen, von der aus die formale analytische Durchrechnung möglich ist, sondern von einer solchen, die den Lernenden bereits vor der genauen Lösung befähigt, sich einen abschätzenden Überblick über die auftretenden Einzelerscheinungen zu verschaffen. Demgemäß nimmt die anschauliche Beschreibung, und aus gleichem Grunde auch die Besprechung der erhaltenen Ergebnisse, einen breiten Raum neben der mathematischen Fassung ein." **(Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.)**

Lehrbuch der Physik.

Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akad. Vorlesungen und zum Selbststudium. Von **E. Grimsehl**, Direktor der Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg. Mit 1091 Textfig., 2 farb. Tafeln und Tabellen physik. Konstanten und Zahlentabellen. [XII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 15.—, geb. ℳ 16.—.



Hörnerblitzableiter mit anfsteig. Lichtbogen.
Aus Grimsehl, Lehrbuch der Physik.

Inhalt: Einleitung. — I. Meßknnde. II. Bewegungslehre (Phoronomie). III. Die Lehre von den Kräften (Dynamik). IV. Elastizität und Festigkeit. V. Gravitation. Poteutialtheorie. VI. Flüssigkeiten. VII. Luftförmige Körper. VIII. Molekularphysik. IX. Wärmelehre. X. Wetterkunde. XI. Wellenlehre. XII. Akustik. XIII. Geometrische Optik. XIV. Physikalische Optik. XV. Die Polarisation des Lichts. XVI. Optische Erscheinnngen in der Atmosphäre. XVII. Die Lichtenergie und ihre Umwandlnngen. XVIII. Physiologische Optik. XIX. Magnetismus. XX. Elektrostatik. XXI. Die atmosphärische Elektrizität. XXII. Die strömende Elektrizität. XXIII. Umwandlung elektrischer Stromenergie in Wärmeenergie. XXIV. Elektrolyse. XXV. Elektromagnetismus. XXVI. Mechanische Wirkungen des elektrischen Stromes. XXVII. Indnktion. XXVIII. Elektrische Entladnngen. XXIX. Elektrische Sehwingungen. — Anhang: Tabellen über wichtige physikalische Koustanten. Zahlentabellen.

„. . . Zu rühmen ist an dem Werk vor allem die lichtvolle Darstellung in einfacher, klarer Sprache, die auch das Eindringen in schwierigere Gebiete leicht macht. Ihren Ausgang nimmt sie immer vom Tatsächlichen, arbeitet scharf heraus, wo die Hypothese einsetzt und wie sich auf ihr die Theorie aufbant. Das Energiegesetz nimmt überall die ihm ankommende führende Stellung ein. Die geschilderten Versnchsanordnnngen und Apparate sind vielfach von Grimsehl zuerst angegeben. — Die tadellose Deutlichkeit und Übersichtlichkeit der vielen Figuren, besondere der sehematischen Zeichnungen, verdient noch besonders hervorgehoben an werden, weil durch sie die klare Darstellung in hohem Grade unterstützt wird. Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich. Dem Werke ist ein großer Leserkreis su wünschen, nnd ich glaube, er ist ihm sicher."

(Hamburger Nachrichten.)

Die Mechanik.

Eine Einführung mit einem metaphysischen Nachwort. Von **Ludwig Tesar**, Professor an der k. k. Staatsrealschule im XX. Bezirke von Wien. Mit 111 Figuren. [XIV u. 220 S.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 3.20, in Leinwand geb. ℳ 4.—

Die Einführuug will die Dunkelheiten mechaniecher Eiuleitnngen dadnrch vermeideu, daß sie erklärt und nicht beschreibt, daß eie die Annahmen des mechanischen Weltbildes allmählich heransarbeitet, daß sie also hewußt dem Wahnbilde einer „Hypothesenfreien Wissenschaft" entgegentritt. — Die Kraft ist von ihrer Änßerung gesehieden; die Bewegnngslehre ist der eigentlichen Mechanik gegenübergestellt; der Begriff des materiellen Pnnktes wird benutzt. Die mechanischen Sätze werden an wirklichen Vorgängen erläutert. Mathematische Formeln sind vermieden, rechnerische Herleitnngeu sehr elementar gehalten. Um aber anch weitergehenden Ansprüchen zu genügeu, führt das Werk in zwischengeschobenen, kleingedruckten Teilen in das Unendliehkeitskalknl vom mechsniechen Standpnnkte ein. Das Bnch führt in einen Teil der Ideen Hartmanns, des Monisten, ein.

Aus Natur und Geisteswelt

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen aus allen Gebieten des Wissens

Jeder Band ist einzeln käuflich

Geheftet M. 1.—, in Leinw. geb. M. 1.25

Verlag B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Verzeichnis der bisher erschienenen Bände innerhalb der Wissenschaften alphabetisch geordnet

I. Religion und Philosophie.

Ästhetik. V. Prof. Dr. R. Hamann. (Bd. 345.)
Aufgaben und Ziele des Menschenlebens. Von Prof. Dr. J. Unold. 4. Aufl. (Bd. 12.)
Bergson, Henri, der Philosoph moderner Relig. Von Pfarrer Dr. E. Ott. (Bd. 480.)
Berkeley siehe Locke, Berkeley, Hume.
Buddhas Leben und Lehre. Von weil. Prof. Dr. R. Pischel. 2. Aufl. von Prof. Dr. H. Lüders. Mit 1 Taf. (Bd. 109.)
Calvin, Johann. Von Pfarrer Dr. G. Soeur. Mit Bildnissen. (Bd. 217.)
Christentum. Aus der Werdezeit des Chr. Von Prof. Dr. J. Geffcken. 2. Aufl. (Bd. 54.)
Christentum und Weltgeschichte. Von Prof. D. Dr. K. Sell. 2. Bde. (Bd. 297, 298.)
— siehe Jesus, Mystik im Christentum.
Einführung in die Philosophie, Theologie, Psychologie siehe Philosophie, Theologie, Psychologie.
Ethik. Grundzüge der E. Von E. Wentscher. (Bd. 397.)
— siehe auch Aufgaben und Ziele des Menschenlebens, sittliche Lebensanschauungen, Willensfreiheit.
Freimaurerei, Die. Anschauungswelt u. Geschichte. Von weil. Geh. Archivrat Dr. L. Keller. (Bd. 463.)
Griechische Religion siehe Religion.
Handschriftenbeurteilung. Von Prof. Dr. G. Schneidemühl. (Bd. 514.)
Heidentum siehe Mystik.
Hume siehe Locke, Berkeley, Hume.
Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)
Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 49.)
Jesus und seine Zeitgenossen. Geschichtliches und Erbauliches. Von Pastor C. Bonhoff. (Bd. 89.)
— Wahrheit und Dichtung im Leben Jesu. Von Pfarrer D. Dr. P. Mehlhorn. 2. Aufl. (Bd. 137.)
— Die Gleichnisse Jesu. Von Prof. D. Dr. H. Weinel. 3. Aufl. (Bd. 46.)
Israelitische Religion siehe Religion.
Kant, Immanuel. Darstellung und Würdigung. Von Prof. Dr. O. Külpe. 3. Aufl. Mit Bildn. (Bd. 146.)
Locke, Berkeley, Hume. Die großen englischen Philosophen. Von Dr. P. Thormeyer. (Bd. 481.)
Luther im Lichte der neueren Forschung. Ein krit. Bericht. Von Prof. D. H. Boehmer. 3. Aufl. Mit 2 Bildn. (Bd. 113.)
Mechanik d. Geisteslebens. V. Prof. Dr. M. Verworn. 3. A. Mit 18 Fig. (Bd. 200.)
Mission, Die evangelische. Von Pastor S. Baudert. (Bd. 406.)
Mystik im Heidentum und Christentum. Von Prof. Dr. Ed. Lehmann. (Bd. 217.)
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. von Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)
Naturphilosophie, Die moderne. Von Dr. J. M. Verweyen. (Bd. 491.)
Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Frh. v. Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Ansichten. (Bd. 6.)
— Palästina und seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)
Paulus, Der Apostel, u. sein Werk. Von Prof. Dr. E. Vischer. (Bd. 309.)
Philosophie, Die. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 186.)
— Einführung in die Philosophie. Von Prof. Dr. R. Richter. 3. Aufl. von Dr. M. Brahn. (Bd. 155.)
— Führende Denker. Geschichtl. Einleitung in die Philosophie. Von Prof. Dr. J. Cohn. 2. Aufl. Mit 6 Bildn. (Bd. 176.)
— s. a. Naturphilosophie, Weltanschauung.
Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland. Von Prof. Dr. O. Külpe. 6. Aufl. (Bd. 41.)
Philosophisches Wörterbuch. Von Dr. P. Thormeyer. (Bd. 520.)
Psychologie. Einführung in die Ps. Von Prof. Dr. E. von Aster. (Bd. 492.)
— siehe Seele des Menschen, Mechanik d. Geisteslebens, Hypnotismus u. Sugg.

Psychologie. Ps. d. Kindes. V. Prof. Dr. F. Gaupp. 3. Aufl. Mit 18 Abb. (Bd 213.)
— **Psychologie d. Beobachters.** Mit 5 Diagrammen. V. Dr. P. Vollitz. (Bd.248.)
— **Einführung in die experiment. Psychologie.** Von Dr. N. Braunshausen. Mit 17 Abbildungen im Text. (Bd. 484.)
— **Geistige Veranlagung und Vererbung psychischer Eigenschaften.** Von Dr. phil. u. med. Georg Sommer. (Bd. 512.)
— siehe auch Pädagogik. Abt. II.
Religion. Die Stellung der R. im Geistesleb. V. Lic. Dr. P. Kalweit. (Bd. 225.)
— **Die Religion der Griechen.** Von Prof. Dr. E. Sauter. (Bd. 457.)
— **Die Grundzüge d. israel. Religionsgeschichte.** Von weil. Prof. Dr. Fr. Giesebrecht. 2. Aufl. (Bd. 52.)
— **Religion und Naturwissenschaft in Kampf und Frieden.** Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
— **Die relig. Strömungen der Gegenwart.** Von Superintend. D. A. H. Braasch. 2. Aufl. (Bd. 66.)
Rousseau. Von Prof. Dr. P. Henkel. 2. Aufl. (Bd. 180.)
Schopenhauer. Von Realschuldir. H. Richert. 2. Aufl. (Bd. 81.)
Seele des Menschen, Die. Von Prof. Dr. J. Nehmke. 4. Aufl. (Bd. 36.)
— siehe auch Psychologie.
Sittliche Lebensanschauungen der Gegenwart. Von weil. Prof. Dr. O. Kirn. 2. Aufl. (Bd. 177.)
— siehe auch Ethik.
Sozialismus siehe VI.
Spencer, Herbert. Von Dr. K. Schwarze. Mit 1 Bildnis. (Bd. 245.)
Staat und Kirche in ihrem gegenseitigen Verhältnis seit der Reformation. Von Dr. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
Testament, Neues. Der Text des N. T. nach seiner geschichtl. Entwicklung. Von Div.-Pfarrer A. Voit. Mit 8 Taf.
— siehe auch Jesus. (Bd. 134.)
Theologie. Einführung in die Theologie. Von Pastor M. Coenils. (Bd. 347.)
Weltanschauung, Griechische. Von Prof. Dr. M. Wundt. (Bd. 329.)
Weltanschauungen, Die, der großen Philosophen der Neuzeit. Von weil. Prof. Dr. L. Busse. 5. Aufl., herausg. von Prof. Dr. R. Falckenberg. (Bd. 56.)
— siehe auch Philosophie.
Weltentstehung. Entsteh. d. W. u. d. Erde nach Sage u. Wissenschaft. Von Prof. Dr. M. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. V. Prof. Dr. M. B. Weinstein. (Bd. 470.)
Willensfreiheit. Das Problem der W. Von Prof. Dr. G. F. Lipps. (Bd. 383.)
— siehe auch Ethik.

II. Pädagogik und Bildungswesen.

Amerikanisches Bildungswesen siehe Techn. Hochschulen, Universitäten, Volksschule.
Bildungswesen, Das deutsche, in seiner geschichtlichen Entwicklung. Von weil. Prof. Dr. Fr. Paulsen. 3. Aufl. Von Prof. Dr. W. Münch. Mit 1 Bildnis Paulsens. (Bd. 100.)
Deutsches Ringen nach Kraft und Schönheit. Aus den literar. Zeugn. eines Jahrh. gesammelt. Von Turninspektor K. Möller. 2 Bde. (Bd. 188. 189.)
Erziehung zur Arbeit. Von Prof. Dr. Ed. Lehmann. (Bd. 459.)
Erziehung, Moderne, in Haus und Schule. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 159.)
— siehe auch Großstadtpädagogik.
Fortbildungsschulwesen, Das deutsche. Von Dir. Dr. F. Schilling. (Bd. 256.)
Fröbel, Friedrich. Leben und Wirken. Von Dr. Joh. Prüfer. (Bd. 82.)
Großstadtpädagog. V. J. Tews. (Bd. 327.)
— siehe Erzieh., Schulkämpfe d. Gegenw.
Handschriftenbeurteilung. Von Prof. Dr. G. Schneidemühl. (Bd. 514.)
Herbarts Lehren und Leben. Von weil. Pastor Dr. O. Flügel. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis Herbarts. (Bd. 164.)
Hilfsschulwesen. Von Rektor Dr. B. Maennel. (Bd. 73.)
Hochschulen s. Techn. Hochschulen u. Univ.
Jugendfürsorge, Die öffentliche. Von Waisenhausdirektor Dr. J. Petersen. 2 Bde. (Bd. 161, 162.)
Jugendpflege. Von Fortbildungsschullehrer W. Wiemann. (Bd. 434.)
Knabenhandarbeit, Die, in der heutigen Erziehung. V. Sem.-Dir. Dr. A. Pabst. Mit 21 Abb. u. Titelbild. (Bd. 140.)
Lehrerbildung siehe Volksschule und Lehrerbildung der Ver. Staaten.
Leibesübungen siehe V.
Mädchenschule, Die höheee, in Deutschland. Von Oberlehrerin M. Martin.
Mittelschule s. Volks- u. Mittelsch. (Bd.65.)
Pädagogik, Allgemeine. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. 4. Aufl. (Bd. 33.)
Pädagogik, Experimentelle, mit bes. Rücks. auf die Erzieh. durch die Tat. Von Dr. W. A. Lay. 2. Aufl. Mit 2 Abb. (Bd. 224.)
— siehe Erziehung, Großstadtpädagogik, Psychologie des Kindes und Einführung i. d. experimentelle Psychologie, geist. Veranlag. u. Vererbung. Abt. I.
Pestalozzi. Leben und Ideen. Von Prof. Dr. P. Natorp. 2. Aufl. Mit 1 Bildnis und 1 Brieffaksimile. (Bd. 250.)
Rousseau. Von Prof. Dr. P. Henkel. 2. Aufl. (Bd. 180.)

Schule siehe Fortbildungs-, Hilfsschulwes., Hoch-, Mädchen-, Mittel-, Volksschule.
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 33 Fig. (Bd. 96.)
Schulkämpfe der Gegenwart. Von J. Tews. 2. Aufl. (Bd. 111.)
— siehe Erziehung, Großstadtpäd.
Schulwesen. Geschichte des deutschen Sch. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 85.)
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum, Geschichte des deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Technische Hochschulen in Nordamerika. Von Prof. S. Müller. Mit zahlr. Abbild., Karte und Lageplan. (Bd. 190.)
Universität. Über Universitäten u. Universitätsstud. V. Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit 1 Bildn. Humboldts. (Bd. 411.)
Universität. Die amerikanische. Von Ph. D. E. D. Perry. Mit 22 Abb. (Bd. 206.
Unterrichtswesen, Das deutsche, der Gegenwart. Von Oberrealschuldir. Dr. K. Knabe. (Bd. 299.)
Volksbildungswesen, Das moderne. Bücher- und Lesehallen, Volkshochschulen und verwandte Bildungseinrichtungen in den wicht. Kulturländern. V. Stadtbibl. Dr. G. Fritz. Mit 14 Abb. (Bd. 266.)
Volks- und Mittelschule, Die preußische. Entwicklung und Ziele. Von Geh. Reg.- u. Schulrat Dr. A. Sachse. (Bd. 432.)
Volksschule und Lehrerbildung der Vereinigten Staaten. Von Dir. Dr. F. Kuypers. Mit 48 Abb. und 1 Titelbild. (Bd. 150.)
Zeichenkunst. Der Weg zur K. Von Dr. E. Weber. Mit 82 Abb. u. 1 Taf. (Bd. 430.)

III. Sprache, Literatur, Bildende Kunst und Musik.

Architektur siehe Baukunst und Renaissancearchitektur.
Ästhetik. Von Prof. Dr. R. Hamann.
— siehe auch Poetik. (Bd. 345.)
Baukunde siehe Abtlg. VI.
Baukunst. Deutsche B. im Mittelalter. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. 3. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 8.)
— **Deutsche Baukunst seit dem Mittelalter bis z. Ausg. des 18. Jahrh.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 62 Abb. und 3 Tafeln. (Bd. 326.)
— **Deutsche Baukunst im 19. Jahrh.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Matthaei. Mit 35 Abb. (Bd. 453.)
— siehe auch Renaissancearchitektur.
Beethoven siehe Haydn.
Bildenden Kunst, Bau und Leben der. Von Dir. Prof. Dr. Th. Volbehr. 2. Aufl. Mit 44 Abb. (Bd. 68.)
— siehe auch Stile.
Björnson siehe Ibsen.
Buch. Wie ein Buch entsteht siehe VI.
Buchgewerbe. Das B. und die Kultur siehe IV.
Dekorative Kunst des Altertums. Von Dr. Fr. Poulsen. Mit 112 Abb. (Bd. 454.)
Drama, Das. Von Dr. B. Busse. Mit 3 Abb. 3 Bde. Bd. I: Von der Antike zum franz. Klassizismus. (Bd. 287.)
Bd. II: Von Versailles bis Weimar. (Bd. 288.)
Bd. III: Von der Romantik zur Gegenwart. (Bd. 289.)
— siehe auch Grillparzer, Lessing, Schiller, Shakespeare und Theater.
Drama, Das deutsche, des 19. Jahrh. In i. Entwickl. dargest. von Prof. Dr. G. Witkowski. 4. Aufl. Mit 1 Bildnis Hebbels. (Bd. 51.)
Drama, Dtsches, d. 19. Jhrh. siehe auch Hebbel, Hauptmann, Ibsen.
Dürer, Albrecht. Von Dr. R. Wustmann. Mit 33 Abb. (Bd. 97.)
Französische Roman, Der, und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Frauendichtung. Geschichte der deutschen F. seit 1800. Mit 3 Bildnissen auf 1 Tafel. Von Dr. H. Spiero. (Bd. 390.)
Griechische Komödie, Die. Von Prof. Dr. A. Körte. Mit einem Titelbild und 2 Tafeln. (Bd. 400.)
Griechische Kunst. Die Blütezeit der g. K. im Spiegel der Reliefsarkophage. Eine Einführung in die griech. Plastik. Von Dr. H. Wachtler. Mit 8 Taf. u. 32 Abb. (Bd. 272.)
— siehe auch Dekorative Kunst.
Grillparzer, Franz. Der Mann u. d. Werk. V. Prof. Dr. A. Kleinberg. (Bd. 513.)
Harmonium siehe Tasteninstrumente.
Hauptmann, Gerhart. V. Prof. Dr. E. Sulger-Gebing. Mit 1 Bildn. (Bd. 283.)
Haydn, Mozart, Beethoven. Von Prof. Dr. C. Krebs. 2. Aufl. Mit 4 Bildn. (Bd. 92.)
— siehe auch Oper.
Hebbel, Friedrich. Von Prof. Dr. O. Walzel. Mit 1 Bildnis. (Bd. 408.)
Heldensage, Die germanische. Von Dr. J. W. Bruinier. (Bd. 486.)
— siehe auch Volkssage.
Homerische Dichtung, Die. Von Rektor Dr. G. Finsler. (Bd. 496.)
Ibsen, Björnson und ihre Zeitgenossen. Von weil. Prof. Dr. B. Kahle. 2. Aufl. von Dr. G. Morgenstern. Mit 7 Bildn. (Bd. 193.)

Impressionismus. Die Maler des J. Von Prof. Dr. B. Lázár. Mit 32 Abb. u. 1 farb. Tafel. (Bd. 395.)
Klavier siehe Tasteninstrumente.
Kunst, Deutsche, im täglichen Leben bis zum Schlusse d. 18. Jahrh. V. Prof. Dr. V. Haendcke. Mit 63 Abb. (Bd. 198.)
Kunst siehe auch Dekorative, Griechische, Ostasiatische Kunst.
Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superint. R. Bürkner. 2. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)
— **Das deutsche Haus und sein Hausrat.** Von Prof. Dr. R. Meringer. Mit 106 Abb. (Bd. 116.)
— siehe auch Wohnungseinricht. Abt. VI.
Lessing. Von Dr. Ch. Schrempf. Mit einem Bildnis. (Bd. 403.)
Lyrik. Geschichte d. deutsch. L. f. Claudius. V. Dr. H. Spiero. 2. Aufl. (Bd. 254.)
— siehe auch Minnesang, Frauendichtung, Volkslied.
Mater, Die altdeutschen, in Süddeutschland. Von H. Nemitz. Mit Bilderanhang. (Bd. 464.)
— siehe auch Dürer, Michelangelo, Impressionismus.
Malerei, Die deutsche, im 19. Jahrh. Von Prof. Dr. R. Hamann. 2 Bände Text, 2 Bände mit 57 ganzseitigen und 200 halbseitigen Abb., auch in 1 Halbpergamentbd. zu M. 6.—. (Bd. 448—451.)
Malerei, Niederländische, im 17. Jahrh. Von Dr. H. Jantzen. Mit zahlr. Abb.
— siehe auch Rembrandt. [(Bd. 373.)
Michelangelo. Von Prof. Dr. E. Httdebrandt. Mit 44 Abb. (Bd. 392.)
Minnesang. Von Dr. J. W. Bruinier.
Mozart siehe Haydn. [(Bd. 404.)
Musik. Die Grundlagen d. Tonkunst. Versuch einer genetischen Darstellung der allgemeinen Musiklehre. Von Prof. Dr. H. Rietsch. (Bd. 178.)
— **Musik. Kompositionsformen.** V. H. G. Kallenberg. 2 Bde. Bd. I: Die elementaren Tonverbindungen als Grundlage der Harmonielehre. Bd. II: Kontrapunktik u. Formenl. (Bd. 412, 413.)
— siehe auch Haydn, Mozart, Beethoven, Wagner.
Musikgeschichte. Von Dr. A. Einstein. (Bd. 143.)
Musikal. Romantik. Die Blütezeit der m. R. in Deutschland. Von Dr. E. Istel. Mit 1 Silhouette. (Bd. 239.)
Mythologie, Germanische. Von Prof. Dr. J. v. Negelein. 2. Aufl. (Bd. 95.)
— siehe auch Volkssage, Deutsche.
Novelle siehe Roman.
Oper, Die moderne. Vom Tode Wagners bis zum Weltkrieg (1883—1914). Von Dr. E. Istel. Mit 3 Bildn. (Bd. 495.)
— siehe auch Haydn, Wagner.
Orchester. Die Instrumente des Orch. Von Prof. Dr. Fr. Volbach. Mit 60 Abb. (Bd. 384.)
— **Das moderne Orchester in seiner Entwicklung.** Von Prof. Dr. Fr. Volbach. Mit Partiturbeisp. u. 3 Taf. (Bd. 308.)
Orgel siehe Tasteninstrumente.
Ostasiatische Kunst und ihr Einfluß auf Europa. Von Dir. Prof. Dr. R. Graul. Mit 49 Abb. (Bd. 87.)
Personennamen, Die deutschen. Von Dir. A. Bähnisch. 2. Aufl. (Bd. 296.)
Perspektive, Grundzüge der. V. Prof. Dr. K. Doehlemann. M. Fig. (Bd. 510.)
Plastik siehe Griechische Kunst.
Poetik. Von Dr. R. Müller-Freienfels. (Bd. 460.)
Rembrandt. Von Prof. Dr. P. Schubring. Mit 50 Abb. (Bd. 158.)
Renaissancearchitektur in Italien. Von Dr. P. Frankl. Mit 12 Taf. u. 27 Textabb. (Bd. 381.)
Rhetorik. Von Dr. E. Geißler. Bd. I. Richtlinien für die Kunst des Sprechens. 2. Aufl. Bd. II. Anweisungen zur Kunst der Rede. (Bd. 455/456.)
— siehe auch Sprechen und Stimme. Abt. V.
Roman, Der französische Roman und die Novelle. Von O. Flake. (Bd. 377.)
Romantik, Deutsche. Von Prof. Dr. O. Walzel. 2. Aufl. (Bd. 232.)
Romantik siehe auch Musikal. Romantik.
Schiller. Von Prof. Dr. Th. Ziegler. Mit 1 Bildn. 2. Aufl. (Bd. 74.)
Schillers Dramen. Von Progymnasialdirektor E. Heusermann. (Bd. 493.)
Shakespeare und seine Zeit. Von Prof. Dr. E. Sieper. Mit 3 Tafeln und 3 Textabbildungen. 2. Aufl. (Bd. 185.)
Sprachbau. Die Haupttypen des menschlichen S. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. (Bd. 268.)
Sprache. Die deutsche S. von heute. Von Dr. W. Fischer. (Bd. 475.)
Sprachstämme des Erdkreises. Von weil. Prof. Dr. F. N. Finck. 2. Aufl. (Bd. 267.)
Sprachwissenschaft. Von Prof. Dr. Kr. Sandfeld-Jensen. (Bd. 472.)
Sprechen. Wie wir sprechen. Von Dr. E. Richter. Mit 20 Abb. (Bd. 354.)
— siehe auch Rhetorik.
Stile. Die Entwicklungsgeschichte der Stile in der bildenden Kunst. Von Dr. E. Cohn-Wiener. 2 Bde.
Bd. I: Vom Altertum bis zur Gotik. Mit 57 Abb. (Bd. 317.)
Bd. II: Von der Renaissance b. z. Gegenwart. Mit 31 Abb. (Bd. 318.)

Tasteninstrumente. Klavier, Orgel, Harmonium. V. Prof. Dr. O. Bie. (Bd. 325.)
Theater, Das. Schauspielhaus und Schauspielkunst vom griech. Altert. bis auf die Gegenwart. Von Professor Dr. Chr. Gaehde. 2. Aufl. M. 18 Abb. (Bd. 230.)
Tonkunst siehe Musik.
Urheberrecht siehe VI.
Volkslied, Das deutsche. Über Wesen und Werden deutschen Volksgesanges. Von Dr. J. W. Bruinier. 5. Aufl. (Bd. 7.)
Volkssage, Die deutsche. Von Dr. O. Böckel. 2. Aufl. (Bd. 262.)
— siehe auch Heldensage, Mythologie.
Wagner. Das Kunstwerk Richard Wagners. Von Dr. E. Istel. Mit Bildn. (Bd. 330.)
— siehe auch Musik. Romantik u. Oper.
Zeitungswesen von Dr. H. Dietz. (Bd. 328.)

IV. Geschichte, Kulturgeschichte und Geographie.

Alpen, Die. Von H. Reishauer. Mit 26 Abb. u. 2 Karten. (Bd. 276.)
Altertum, Das, im Leben der Gegenwart. V. Prof. Dr. P. Cauer. 2. A. (Bd. 356.)
Amerika. Geschichte der Vereinigten Staaten von A. Von Prof. Dr. E. Daenell. 2. Aufl. (Bd. 147.)
— **Südamerika.** Von Prof. Dr. F. Regel. (Bd. 544.)
Amerikaner, Die. Von R. M. Butler. Deutsch v. Prof. Dr. W. Taszkowski (Bd. 319.)
— siehe ferner Lehrerbildung, Volksschule, Techn. Hochschulen, Universitäten Amerikas in Abt. II.
Antike Wirtschaftsgeschichte. Von Dr. O. Neurath. (Bd. 258.)
Australien und Neuseeland. Land, Leute und Wirtschaft. Von Prof. Dr. R. Schachner. (Bd. 366.)
Baltischen Provinzen, Die. Von Dr. Valerian Tornius. (Bd. 542.)
Bauernhaus. Kulturgeschichte des deutschen B. Von Reg.-Baumeister Chr. Rauck. 2. Aufl. Mit 70 Abb. (Bd. 121.)
Bauernstand. Geschichte des deutschen B. Von Prof. Dr. H. Gerdes. Mit 21 Abb. (Bd. 320.)
Belgien. Von Dr. P. Oßwald. Mit fünf Karten. (Bd. 501.)
Bismarck und seine Zeit. Von Dr. P. Valentin. Mit einem Bildn. Bismarcks. 13.—15. Tausend. (Bd. 500.)
Brandenburgisch-preußische Geschichte. Von Archivassistent Dr. Fr. Israel. I. Von den Anfängen bis auf die Regierung Friedrich Wilhelms I. II. Von der Regierung Friedrich d. Großen bis zur neuesten Zeit. (Bd. 521.)
Buchgewerbe. Das B. und die Kultur. Mit 1 Abb. (Bd. 182.)
— siehe auch Schrift- und Buchwesen.
Byzanz. Charakterköpfe. V. Privatdoz. Dr. K. Dieterich. Mit 2 Bildn. (Bd. 244.)
Charakterbilder aus deutscher Geschichte siehe Von Luther zu Bismarck.
Deutsch: Deutsches Bauernhaus s. Bauernhaus. — **Deutscher Bauernstand** s. Bauernstand. — **Deutsches Dorf** s. Dorf. — **Deutsche Einheit** s. Vom Bund zum Reich. — **Deutsches Frauenleben** s. Frauenleben. — **Deutsche Geschichte** s. Geschichte. — **Deutscher Handel** s. Handel. — **Deutsches Haus** s. Haus. — **Deutsche Kolonien** s. Kolonien. — **Deutsche Sprache** s. Sprache. Abt. III. — **Deutsche Städte** s. Städte. — **Deutsche Verfassung, Verfassungsrecht** s. Verfassung, Verfassungsrecht. — **Deutsche Volksstämme, Volkstrachten** s. Volksfeste, Volksstämme usw. — **Deutsches Wirtschaftsleb.** s. Wirtschaftsl. usw.
Deutschtum im Ausland, Das. Von Prof. Dr. R. Hoeniger. (Bd. 402.)
Dorf, Das deutsche. Von R. Mielke. 2. Aufl. Mit 51 Abb. (Bd. 192.)
England. England und Deutschland in ihren Beziehungen vom Mittelalter bis zur Gegenwart. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 543.)
— **Englands Weltmacht in ihrer Entwicklung vom 17. Jahrhundert bis auf unsere Tage.** V. Prof. Dr. W. Langenbeck. 2. Aufl. Mit 19 Bildn. (Bd. 174.)
Entdeckungen, Das Zeitalter der. Von Prof. Dr. S. Günther. 3. Aufl. Mit 1 Weltkarte. (Bd. 26.)
Familienforschung. Von Dr. E. Devrient. M. 7 Abb. u. 2 Taf. (Bd. 350.)
Frauenbewegung. Die moderne. Ein geschichtlicher Überblick. Von Dr. K. Schirmacher. 2. Aufl. (Bd. 67.)
Frauenleben, Deutsch., i. Wandel d. Jahrhunderte. Von Dr. Ed. Otto. (Bd. 45.)
Friedrich d. Gr. V. Prof. Dr. Th. Litt. 2. Aufl. M. 3 Bild. (Bd. 246.)
Gartenkunst. Geschichte d. G. Von Reg.-Baumeister Chr. Rauck. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)
Germanische Heldensage siehe Heldensage.
Germanische Kultur in der Urzeit. Von Prof. Dr. G. Steinhausen. 2. Aufl. Mit 13 Abb. (Bd. 75.)
Geschichte. Deutsche siehe Von Luther zu Bismarck, Brandenburg.-preußische Geschichte, Friedrich der Große, Restauration u. Revolution, Von Jena bis zum Wiener Kongreß, Revolution 1848, Reaktion u. neue Ära, Vom Bund zum Reich, Moltke, Bismarck.
Griechentum. Seine Entwicklung bis zur römischen Kaiserzeit. V. Prof. Dr. R. v. Scala. Mit 46 Abb. (Bd. 471.)

Griechische Städte. Kulturbilder aus gr. St. Von Oberlehrer Dr. E. Biebarth. 2. A. M. 23 Abb. u. 2 Tafeln. (Bd. 131.)

Handel. Geschichte des Welthandels. Von Prof. Dr. M. G. Schmidt. 2. Aufl. (Bd. 118.)

— Geschichte des deutschen Handels. Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 237.)

Handwerk. Das deutsche, in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Dir. Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 27 Abb. (Bd. 14.)

Haus, Das deutsche, und sein Hausrat. Von Prof. Dr. R. Meringer. Mit 106 Abb. (Bd. 116.)

— Kunstpflege in Haus und Heimat. Von Superintendent R. Bürkner. 2. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 77.)

— s. auch Wohnungseinrichtung Abt. VI.

Heldensage, Die germanische. Von Dr. F. W. Bruinier. (Bd. 486.)

Holland siehe Städtebilder, Historische.

Japaner, Die, i. d. Weltwirtschaft. V. Prof. Dr. K. Rathgen. 2. Aufl. (Bd. 72.)

Jesuiten, Die. Eine histor. Skizze. Von Prof. Dr. H. Boehmer. 3. Aufl. (Bd. 49.)

Internationale Leben, Das, der Gegenwart. Von A. H. Fried. Mit 1 Tafel. (Bd. 226.)

Island, das Land und das Volk. Von Prof. Dr. P. Herrmann. Mit 9 Abb.

Kalender siehe Abt. V. (Bd. 461.)

Kolonien, Die deutschen. (Land und Leute.) Von Dr. A. Heilborn. 3. Aufl. Mit 28 Abb. u. 8 Karten. (Bd. 98.)

Kolonialgeschichte, Allgemeine. Von Prof. Dr. F. Keutgen. 2 Bde. (Bd. 545/546.)

— Unsere Schutzgebiete nach ihren wirtschaftl. Verhältnissen. Von Dr. Chr. G. Barth. (Bd. 290.)

Krieg, Der, im Zeitalter des Verkehrs und der Technik. Von Major A. Meyer. M. 3 Abb. u. 2 Taf. (Bd. 271.)

— Vom Kriegswesen im 19. Jahrhundert. Von Major O. v. Sothen. Mit 9 Übersichtskarten. (Bd. 59.)

— Krieg und Sieg. Eine kurze Darstellung moderner Kriegskunst. Von Major a. D. F. C. Endres. (Bd. 519.)

— siehe auch Seekrieg.

Mensch und Erde. Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beidrn. Von weil. Prof. Dr. A. Kirchhoff. 4. Auflage. (Bd. 31.)

Mittelalterliche Kulturideale. Von Prof. Dr. W. Vedel. 2 Bde.
Bd. I: Heldenleben. Bd. II: Ritterromantik. (Bd. 292. 293.)

Moltke. B. Kaiserl. Ottoman. Major a. D. F. C. Endres. Mit 1 Bildn. (Bd. 415.)

Münze, Die, als historisches Denkmal sowie ihre Bedeutung im Rechts- und Wirtschaftsleben. Von Prof. Dr. A. Luschin v. Ebengreuth. Mit 53 Abb.

— siehe auch Geld. Abt. VI. (Bd. 91.)

Mythologie siehe I. und III.

Napoleon I. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. 2. Aufl. Mit 1 Bildn. (Bd. 195.)

Nationalbewußtsein, Die Entwicklung des deutschen. Von Prof. Dr. Joachimsen. (Bd. 511.)

Naturvölker, Die geistige Kultur der N. Von Prof. Dr. K. Th. Preuß. Mit 9 Abb. (Bd. 452.)

Orient, Der. Eine Länderkunde. Von E. Banse. 3 Bde.
Bd. I: Die Atlasländer. Marokko, Algerien, Tunesien. Mit 15 Abb., 10 Kartenskizzen, 3 Diagr. u. 1 Tafel. (Bd. 277.)
Bd. II: Der arabische Orient. Mit 29 Abb. und 7 Diagrammen. (Bd. 278.)
Bd. III: Der asiatische Orient. Mit 34 Abb., 3 Karten u. 2 Diagr. (Bd. 279.)

Österreich. Geschichte der auswärtigen Politik Österreichs im 19. Jahrhundert. Von R. Charmatz. 2 Bde. I. Bis zum Sturze Metternichs. (Bd. 374.) II. Von der Revolution bis zur Annexion (1848 bis 1908). (Bd. 375.)

— Österreichs innere Geschichte v. 1848 bis 1907. V. R. Charmatz. 2 Bde. 2. Aufl.
Bd. I: D. Vorherrsch. d. Deutschen. Bd. II: Der Kampf d. Nationen. (Bd. 242. 243.)

Ostseegebiet. Mit 21 Abbildungen und 1 mehrfarbigen Karte. Von Privatdozent Dr. G. Braun. (Bd. 367.)

Palästina und seine Geschichte. Von Prof. Dr. H. Freiherr von Soden. 3. Aufl. Mit 2 Karten, 1 Plan u. 6 Anf. (Bd. 6.)

— Palästina u. seine Kultur in fünf Jahrtausenden. Von Gymnasialoberlehrer Dr. P. Thomsen. Mit 36 Abb. (Bd. 260.)

Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- u. Südpol v. d. ältest. Zeiten bis zur Gegenw. V. Prof. Dr. K. Hassert. 3. Aufl. Mit 6 Kart. (Bd. 38.)

Politik. V. Dr. A. Grabowsky. (Bd. 537.)

— Kurze V. d. Großmächte s. 1871. 2 Bde. V. Prof. Dr. H. Hashagen. (Bd. 522. 523.)

— Politische Geographie. Von Dr. E. Schöne. (Bd. 353.)

— Politische Hauptströmungen in Europa im 19. Jahrhundert. Von weil. Prof. Dr. K. Th. v. Heigel. 3. Aufl. (Bd. 129.)

Pompeji, eine hellenistische Stadt in Italien. Von Prof. Dr. Fr. v. Duhn. 2. Aufl. Mit 62 Abb. (Bd. 114.)

Reaktion und neue Ära. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der Gegenwart. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 101.)

Religion, Griechische u. israelitische s. I.

Restauration und Revolution. Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 3. Aufl. (Bd. 37.)

Revolution. Geschichte der Französischen R. Von Prof. Dr. Th. Bitterauf. Mit 8 Bildern. (Bd. 346.)
— 1848. Sechs Vorträge. Von Prof. Dr. O. Weber. 2. Aufl. (Bd. 53.)
Rom. Das alte Rom. Von Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. O. Richter. Mit Bilderanhang u. 4 Plänen. (Bd. 386.)
— Soziale Kämpfe i. alt. Rom. V. Privatdozent Dr. L. Bloch. 3. Aufl. (Bd. 22.)
— Roms Kampf um die Weltherrschaft. V. Prof. Dr. J. Kromayer. (Bd. 368.)
Schrift- und Buchwesen in alter und neuer Zeit. Von Prof. Dr. O. Weise. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 4.)
— siehe auch Buchgewerbe.
Schweiz. Land, Volk, Staat und Wirtschaft. Von Reg.- u. Ständerat Dr. O. Wettstein. Mit 1 Karte. (Bd. 482.)
Seekrieg. Eine geschichtl. Entwicklung vom Zeitalter der Entdeckungen bis zur Gegenwart. Von K. Freiherrn v. Maltzahn, Vizeadmiral a. D. (Bd. 99.)
— Das Kriegsschiff. Von Geh. Marinebaurat Krieger. Mit 60 Abb. (Bd. 389.)
Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Maier. 4. Aufl. (Bd. 2.)
— siehe auch Abt. VI.
Staat u. Kirche in ihr. gegenseit. Verhältnis seit d. Reformation. V. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)
Städte, Die. Geographisch betrachtet. Von Prof. Dr. K. Haffert. Mit 21 Abb. (Bd. 163.)
— Deutsche Städte und Bürger im Mittelalter. Von Prof. Dr. V. Heil. 3. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 43.)
— Historische Städtebilder aus Holland und Niederdeutschland. Von Reg.-Baumeister a. D. A. Erbe. Mit 59 Abb. (Bd. 117.)
— siehe auch Griechische Städte, ferner Pompeji, Rom.
Student, Der Leipziger, von 1409 bis 1909. Von Dr. W. Bruchmüller. Mit 25 Abb. (Bd. 273.)
Studententum. Geschichte d. deutschen St. Von Dr. W. Bruchmüller. (Bd. 477.)
Verfassung. Grundzüge der V. des Deutschen Reiches. Von Prof. Dr. E. Löning. 4. Aufl. (Bd. 34.)
Verfassungsrecht. Deutsches, in geschichtlicher Entwicklung. Von Prof. Dr. Ed. Hubrich. 2. Aufl. (Bd. 80.)
Völkerkunde, Allgemeine. Von Dr. Adolf Heilborn. 2 Bände.
Bd. I: Das Feuer, der Nahrungserwerb, Wohnung, Schmuck und Kleidung. Mit 54 Abbildungen. (Bd. 487.)
Bd. II: Waffen und Werkzeuge, die Industrie, Handel und Geld, die Verkehrsmittel. Mit 51 Abb. (Bd. 488.)
Bd. III: Die geistige Kultur der Naturvölker. Von Prof. Dr. K. Th. Preuß. Mit 9 Abbildungen. (Bd. 452.)
Volksfeste, deutsche, und Volksbräuche. Von Dr. E. Fehrle. (Bd. 518.)
Volksstämme, Die deutschen, und Landschaften. Von Prof. Dr. O. Weise. 4. Aufl. Mit 29 Abb. (Bd. 16.)
Volkstrachten, Deutsche. Von Pfarrer C. Spieß. Mit 11 Abb. (Bd. 342.)
Vom Bund zum Reich. Neue Skizzen zur Entwicklungsgeschichte der deutschen Einheit. Von Prof. Dr. R. Schwemer. 2. Aufl. (Bd. 102.)
Von Jena bis zum Wiener Kongreß. Von Prof. Dr. G. Roloff. (Bd. 465.)
Von Luther zu Bismarck. 12 Charakterbilder aus deutscher Geschichte. Von Prof. Dr. O. Weber. 2 Bde. 2. Aufl. (Bd. 123. 124.)
Wirtschaftliche Erdkunde. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 2. Aufl. Bearb. von Prof. Dr. K. Dove. (Bd. 122.)
Wirtschaftsleben, Deutsches. Auf geogr. Grundlage geschildert. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 3. Aufl. Neubearb. von Dr. H. Reinlein. (Bd. 42.)
— Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens siehe VI.
Wirtschaftsgeschichte, Antike. Von Dr. O. Neurath. (Bd. 258.)

V. Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin.

Aberglaube, Der, in der Medizin und seine Gefahr für Gesundheit und Leben. Von Prof. Dr. D. v. Hansemann. 2. Aufl. (Bd. 83.)
Abstammungs- und Vererbungslehre, Experimentelle. Von Dr. H. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
Abstammungslehre und Darwinismus. Von Prof. Dr. R. Hesse. 4. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)
Abwehrkräfte des Körpers, Die. Einführung in die Immunitätslehre. Mit 52 Abbildungen. Von Privatdozent Dr. med. H. Kämmerer. (Bd. 479.)
Algebra siehe Arithmetik.
Alkoholismus, Der. Von Dr. G. B. Gruber. Mit 7 Abb. (Bd. 103.)
Ameisen, Die. Von Dr. Fr. Knauer. Mit 61 Fig. (Bd. 94.)

Anatomie des Menschen, Die. Von Prof. Dr. K. v. Bardeleben. 6 Bde.
I. Teil: Zellen- und Gewebelehre. Entwicklungsgeschichte. Der Körper als Ganzes. Mit 70 Abb. 2. Aufl. (Bd. 418.)
II. Teil: Das Skelett. Mit 53 Abbild. 2. Aufl. (Bd. 419.)
III. Teil: Das Muskel- und Gefäßsystem. Mit 68 Abb. 2. Aufl. (Bd. 420.)
IV. Teil: Die Eingeweide (Darm-, Atmungs-, Harn- und Geschlechtsorgane). Mit 39 Abb. 2. Aufl. (Bd. 421.)
V. Teil: Nervensystem und Sinnesorgane. Mit 50 Abb. (Bd. 422.)
VI. Teil: Statik und Mechanik des menschl. Körpers. M. 26 Abb. (Bd. 423.)

Anatomie siehe auch Wirbeltiere.

Aquarium, Das. Von E. W. Schmidt. Mit 15 Fig. (Bd. 335.)

Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Von Prof. Dr. Boruttau. (Bd. 540.)

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. 2 Bde.
I. Teil: Die Rechnungsarten. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Gleichungen zweiten Grades. 3. Aufl. Mit 9 Fig. (Bd. 120.)
II. Teil: Gleichungen. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszins- u. Rentenrechnung. Komplexe Zahlen. Binomischer Lehrsatz. 2. A. Mit 21 Fig. (Bd. 205.)

Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)

Aszt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Von Dr. med. M. Fürst. (Bd. 265.)

Astronomie, Probleme der modernen Astr. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. Mit 11 Fig. (Bd. 355.)

— **Astronomie in ihrer Bedeutung für das praktische Leben.** Von Prof. Dr. A. Marcuse. Mit 26 Abb. (Bd. 378.)

— siehe auch Weltall, Weltbild, Sonne, Mond, Planeten.

Atome, Moleküle — Atome — Weltäther. Von Prof. Dr. G. Mie. 3. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 58.)

Auge des Menschen, Das, und seine Gesundheitspflege. Von Prof. Dr. G. Abelsdorff. Mit 15 Abb. (Bd. 149.)

— **Auge, Das, und die Brille.** Von Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)

Bakterien, Die, im Kreislauf des Stoffes in der Natur und im Haushalt des Menschen. Von Prof. Dr. E. Gutzeit. Mit 13 Abb. (Bd. 233.)

— **Die krankheitserregenden Bakterien.** Von Privatdozent Dr. M. Loehlein. Mit 33 Abb. (Bd. 307.)

— siehe auch Abwehrkräfte, Desinfektion.

Bau und Tätigkeit des menschlichen Körpers. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)

Befruchtungsvorgang, Der, sein Wesen und seine Bedeutung. Von Dr. E. Teichmann. 2. Aufl. Mit 7 Abb. und 4 Doppeltafeln. (Bd. 70.)

Biochemie. Einführung in die B. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 12 Fig. (Bd. 352.)

Biologie, Allgemeine. Von Prof. Dr. H. Miehe. 2. Aufl. Mit 40 Fig. (Bd. 130.)

— **Experimenteile.** Von Dr. C. Thesing. Mit Abb. 2 Bde. Bd. I: Experim. Zellforschung. Bd. II: Regeneration, Transplantat. u. verw. Gebiete. (Bd. 336, 337.)

— siehe a. Abstammungslehre u. Befruchtungsvorgang, Lebewesen, Organismen, Mensch u. Tier, Sexualbiologie, Urtiere.

Blumen, Unsere Bl. und Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)

— **Unsere Bl. und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)

— siehe auch Garten.

Blut, Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)

Botanik siehe Blumen, Kulturpflanzen, Kolonialbotanik in Abt. VI.

Brille. Das Auge und die Br. Von Dr. M. v. Rohr. Mit 84 Abb. und 1 Lichtdrucktafel. (Bd. 372.)

Chemie. Einführung in die chemische Wissenschaft. Von Prof. Dr. W. Löb. Mit 16 Fig. (Bd. 264.)

— **Einführung in die organ. Chemie:** Natürl. und künstl. Pflanzen- u. Tierstoffe. Von Dr. B. Bavink. 2. Aufl. Mit 7 Fig. (Bd. 187.)

— **Einführung i. d. analyt. Chemie.** V. Dr. F. Rüsberg. 2 Bde. (Bd. 524, 525.)

— siehe a. Biochemie, Elektrochemie, Luft, Photochemie; Chemische Technik Abt. VI.

— **Chemie in Küche und Haus.** Von Dr. J. Klein. 3. Aufl. (Bd. 76.)

Chirurgie, Die, unserer Zeit. Von Prof. Dr. Feßler. Mit 52 Abb. (Bd. 339.)

Darwinismus, Abstammungslehre und D. Von Prof. Dr. R. Hesse. 4. Aufl. Mit 37 Fig. (Bd. 39.)

Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- u. Med.-Rat Dr. O. Solbrig. Mit 20 Abbildungen im Text. (Bd. 401.)

Differential- u. Integralrechnung. Von Dr. M. Lindow. (Bd. 387.)

Eiszeit, Die, und der vorgeschichtliche Mensch. Von Prof. Dr. G. Steinmann. Mit 24 Abb. (Bd. 302.)

Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)

Elektrotechnik, Grundlagen der E. Von Dr. A. Rotth. Mit 72 Abb. (Bd. 394.)

Energie. Die Lehre von der E. Von Dr. A. Stein. 2. Aufl. Mit 13 Fig. (Bd. 257.)

Ernährung und Volksnahrungsmittel. Von weil. Prof. Dr. J. Frenzel. 2. Aufl. von Geh.-Rat Prof. Dr. R. Zuntz. Mit 7 Abb. u. 2 Taf. (Bd. 19.)

Garten. Der Kleine. Von Redakteur Joh. Schneider. Mit 80 Abb. (Bd. 498.)
— **Der Hausgarten.** Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit Abb. (Bd. 502.)
— siehe auch Blumen, Pflanzen, Gartenkunst, Gartenstadtbewegung Abt. VI.

Gebiß, Das menschliche, seine Erkrankung und Pflege. Von Zahnarzt Fr. Jäger. Mit 24 Abb. (Bd. 229.)

Geisteskrankheiten. Von Anstaltsoberarzt Dr. G. Ilberg. (Bd. 151.)

Genußmittel siehe Kaffee, Tee, Kakao, Tabak, Arzneimittel u. Genußmittel.

Geologie, Allgemeine. Von Geh. Bergrat Prof. Dr. Fr. Frech. 2. u. 3. Aufl.
Bd. I: Vulkane einst und jetzt. Mit 80 Abb. (Bd. 207.)
Bd. II: Gebirgsbau und Erdbeben. Mit 57 Abb. (Bd. 208.)
Bd. III: Die Arbeit des fließenden Wassers. Mit 56 Abb. (Bd. 209.)
Bd. IV: Die Arbeit des Ozeans und die chemische Tätigkeit des Wassers im allgemeinen. Mit 1 Titelbild und 51 Abb. (Bd. 210.)
Bd. V: Kohlenbildung und Klima der Vorzeit. Mit 1 Titelbild und 49 Abb. (Bd. 211.)
Bd. VI: Gletscher einst und jetzt. Mit 1 Titelbild und 65 Abb. (Bd. 61.)

Geometrie. Darstellende G. Von Oberl. P. B. Fischer. (Bd. 541.)
— **Analytische G. zum Selbstunterricht.** Von Dr. P. Crantz. Mit 55 Fig. (Bd. 504.)
— s. auch Stereometrie, Trigonometrie.

Geschlechtskrankheiten, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Bekämpfung und Verhütung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 3. Aufl. Mit 4 Abb. und 1 Tafel. (Bd. 251.)

Gesundheitslehre. Acht Vorträge aus der G. Von weil. Prof. Dr. H. Buchner. 4. Aufl. bes. v. Obermedizinalr. Prof. Dr. M. v. Gruber. Mit 26 Abb. (Bd. 1.)
— **Gesundheitslehre für Frauen.** Von Prof. Dr. K. Baisch. (Bd. 538.)
— siehe auch Abwehrkräfte, Bakterien, Leibesübungen.

Gesundheitspolitik und Gesundheitsgesetzgebung. Von Obermedizinalrat Prof. Dr. M. v. Gruber. (Bd. 531.)

Graphische Darstellung, Die. V. Prof. Dr. F. Auerbach. Mit 100 Abb. (Bd. 437.)

Haushalt siehe Bakterien, Chemie, Desinfektion, Naturwissenschaften, Physik.

Haustiere. Die Stammesgeschichte unserer H. Von Prof. Dr. C. Keller. Mit 28 Fig. (Bd. 252.)
— siehe auch Tierzüchtung Abt. VI.

Heilwissenschaft, Die moderne. Wesen und Grenzen des ärztlichen Wissens. Von Dr. E. Biernacki. Deutsch von Dr. S. Ebel. (Bd. 25.)

Herz, Blutgefäße und Blut und ihre Erkrankungen. Von Prof. Dr. H. Rosin. Mit 18 Abb. (Bd. 312.)

Hypnotismus und Suggestion. Von Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)

Immunitätslehre siehe Abwehrkräfte des Körpers.

Infinitesimalrechnung. Einführung in die I. Von Prof. Dr. G. Kowalewski. 2. Aufl. Mit 18 Fig. (Bd. 197.)

Integralrechnung siehe Differentialrechnung.

Kaffee, Tee, Kakao u. die übrig. narkotisch. Getränke. Von Prof. Dr. A. Wieler. Mit 24 Abb. u. 1 Karte. (Bd. 132.)

Kalender, Der. Von weil. Prof. Dr. W. F. Wislicenus. 2. Aufl. (Bd. 69.)

Konservierung siehe Desinfektion.

Korallen u. and. gesteinbild. Tiere. V. Prof. Dr. W. May. Mit 45 Abb. (Bd. 231.)

Kosmetik. Ein kurzer Abriß der ärztlichen Verschönerungskunde. Mit Abb. Von Dr. J. Saudek. (Bd. 489.)

Krebs, Der, Von Prof. Dr. R. Werner. (Bd. 494.)

Kulturpflanzen. Unsere wichtigsten K. (Die Getreidegräser.) Von Prof. Dr. K. Giesenhagen. 2. Aufl. Mit 38 Fig. (Bd. 10.)

Lebewesen. Die Beziehungen der Tiere und Pflanzen zueinander. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. Mit 132 Abb.
— — I. Der Tiere zueinander. (Bd. 426.)
— — II. Der Pflanzen zueinander und zu den Tieren. (Bd. 427.)
— siehe auch Organismen, Biologie.

Leibesübungen, Die, und ihre Bedeutung für die Gesundheit. Von Prof. Dr. R. Zander. 3. Aufl. Mit 19 Abb. (Bd. 13.)

Licht, Das, und die Farben. Von Prof. Dr. L. Graetz. 4. Aufl. Mit 117 Abb. (Bd. 17.)

Luft, Wasser, Licht und Wärme. Neun Vorträge aus dem Gebiete der Experimentalchemie. Von Prof. Dr. R. Blochmann. 4. Aufl. Mit 115 Abb. (Bd. 5.)

Luftstickstoff, Der, und seine Verwertung. Von Prof. Dr. K. Kaiser. Mit 13 Abb. (Bd. 313.)

Mathematik. Einführung in die M. Von Oberl. W. Mendelssohn. (Bd. 508.)
— **Praktische M.** Von Dr. R. Neuendorff. I. Teil: Graphisches und numerisches Rechnen, kaufm. Rechnen i. tägl. Leben, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 62 Fig. u. 1 Tafel. (Bd. 341.)
II. Teil: Geometr. Konstruktionen, Perspektive, Orts-, Zeit- u. Entfernungsberechnungen. (Bd. 526.)

Mathematik. Naturwissenschaften und M. im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)
— **Mathematische Spiele.** Von Dr. W. Ahrens. 2. Aufl. Mit 70 Fig. (Bd. 170.)
Mechanik. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. 3 Bde. Bd. I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abb. Bd. II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abb. Bd. III: Die Mechanik d. gasförm. Körper. (Bd. 303, 304, 305.)
— siehe auch Statik.
Meer. Das M., seine Erforschung und sein Leben. Von Dr. O. Janson. 3. Aufl. Mit 40 Fig. (Bd. 30.)
Mensch. Entwicklungsgeschichte d. M. Von Dr. A. Heilborn. Mit 60 Abb. (Bd. 388.)
— **Mensch d. Urzeit, Der.** Vier Vorlesung. aus der Entwicklungsgeschichte des Menschengeschlechtes. Von Dr. A. Heilborn. 2. Aufl. Mit zahlr. Abb. (Bd. 62.)
— **Der vorgeschichtl. Mensch** siehe Eiszeit.
— **Mensch u. Erde.** Skizzen von den Wechselbeziehungen zwischen beiden. Von weil. Prof. Dr. A. Kirchhaff. 4. A. (Bd. 31.)
— **Mensch u. Tier, Der Kampf zwischen Mensch und Tier.** Von Prof. Dr. K. Eckstein. 2. Aufl. Mit 51 Fig. (Bd. 18.)
Menschlicher Körper. Bau und Tätigkeit des menschl. K. Von Prof. Dr. H. Sachs. 3. Aufl. Mit 37 Abb. (Bd. 32.)
— siehe auch Anatomie, Arbeitsleistungen, Blut, Herz, Nervensystem, Physiologie, Sinne, Verbildungen.
Mikroskop, Das. Seine Optik, Geschichte u. Anwendung. Von Prof. Dr. Scheffer. Mit 99 Abb. 2. Aufl. (Bd. 235.)
Moleküle — Atome — Weltäther. V. Prof. Dr. G. Mie. 3. A. M. 27 Fig. (Bd. 58.)
Mond, Der. Von Prof. Dr. J. Franz. Mit 31 Abb. (Bd. 90.)
Natur u. Mensch. V. Direkt. Prof. Dr. M. G. Schmidt. Mit 19 Abb. (Bd. 458.)
Naturlehre. Die Grundbegriffe der modernen N. Von Prof. Dr. F. Auerbach. 3. Aufl. Mit 79 Fig. (Bd. 40.)
Naturphilosophie. Die mod. V. Privatdoz. Dr. J. M. Verweyen. (Bd. 491.)
Naturwissenschaften im Haushalt. Von Dr. J. Bongardt. 2 Bde.
I. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? Mit 31 Abb.
II. Teil: Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? Mit 17 Abb. (Bd. 125/126.)
Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum. Von Prof. Dr. Joh. L. Heiberg. (Bd. 370.)
Naturwissenschaft und Religion. N. und R. in Kampf und Frieden. Von Dr. A. Pfannkuche. 2. Aufl. (Bd. 141.)
Naturwissenschaft. u. Technik. Am laufend. Webstuhl der Zeit. Übersicht üb. Wirkung. d. Entwickl. der N. und T. auf d. gesamte Kulturleben. Von Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. Mit 16 Abb. (Bd. 23.)
Nerven. Vom Nervensystem, sein. Bau u. seln. Bedeutung für Leib u. Seele in gesund. u. krank. Zustande. V. Prof. Dr. R. Sander. 2. Aufl. Mit 27 Fig. (Bd. 48.)
— siehe auch Anatomie.
Optik siehe Auge, Brille, Kinematographie, Licht und Farbe, Mikroskop, Spektroskopie, Stereoskop, Strahlen.
Organismen. Die Welt der O. In Entwickl. u. Zusammenhang darges. V. Prof. Dr. K. Lampert. Mit 52 Abb. (Bd. 236.)
— siehe auch Lebewesen.
Paläozoologie, siehe Tiere der Vorwelt.
Pflanzen. Das Werden und Vergehen der Pfl. Von Prof. Dr. P. Giesenius. Mit 24 Abb. (Bd. 173.)
— **Vermehrung und Sexualität bei den Pflanzen.** Von Prof. Dr. E. Küster. Mit 38 Abb. (Bd. 112.)
— **Die fleischfressenden Pflanzen.** Von Dr. A. Wagner. Mit 82 Abb. (Bd. 344.)
— **Unsere Blumen und Pflanzen im Garten.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Unsere Blumen und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)
— siehe auch Lebewesen.
Pflanzenwelt des Mikroskops, Die. Von Bürgerschullehrer E. Neukauf. Mit 100 Abb. (Bd. 181.)
Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. (Bd. 227.)
Physik. Werdegang der modernen Ph. Von Dr. H. Keller. Mit 13 Fig. (Bd. 343.)
— **Einleitg. i. d. Experimentalph.** V. Prof. Dr. R. Börnstein. M. 90 Abb. (Bd. 371.)
— **Physik in Küche und Haus.** Von Prof. H. Speitkamp. Mit 51 Abb. (Bd. 478.)
Physiker. Die großen Ph. und ihre Leistungen. Von Prof. Dr. F. A. Schulze. Mit 7 Abb. (Bd. 324.)
Physiologie des Menschen. Von Privatdoz. Dr. A. Lipschütz. 4 Bde. I: Allgem. Physiologie. II: Physiologie d. Stoffwechsels. III: Ph. d. Atmung, d. Kreislaufs u. d. Ausscheidung. IV: Ph. der Bewegung und der Empfindung. (Bd. 527—530.)
Pilze, Die. Von Dr. A. Eichinger. Mit 54 Abb. (Bd. 334.)
Planeten, Die. Von Prof. Dr. B. Peter. Mit 18 Fig. (Bd. 240.)
Planimetrie z. Selbstunterricht. V. Prof. Dr. P. Crantz. Mit 99 Fig. (Bd. 340.)
Radium und Radioaktivität. Von Dr. M. Centnerszwer. Mit 33 Abb. (Bd. 405.)
Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)
Säugling, Der, s. Ernährung u. s. Pflege. V. Dr. W. Kaupe. M. 17 Abb. (Bd. 154.)
Schachspiel, Das, und seine strategischen Prinzipien. Von Dr. M. Lange. 2. Aufl. Mit 2 Bildn., 1 Schachbrettafel u. 43 Darst. v. Übungsbeispiel. (Bd. 281.)

Schachmeister, Die modernen. Von Dr. M. Lange. (Bd. 531.)
Schulhygiene. Von Prof. Dr. L. Burgerstein. 3. Aufl. Mit 43 Fig. (Bd. 96.)
Sexualbiologie. Grundriß d. S. V. Prof. Dr. Boruttau. 2 Bde. (Bd. 539/540.)
Sinne d. Mensch., Die fünf. V. Prof. Dr. F. K. Kreibig. 2. A. M. 39 Abb. (Bd. 27.)
Sonne, Die. Von Dr. A. Krause. Mit 64 Abb. (Bd. 357.)
Spektroskopie. Von Dr. L. Grebe. Mit 62 Abb. (Bd. 284.)
Spiel, siehe mathem. Spiele, Schachspiel.
Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. Von Reg.-Baum. A. Schau. (Bd. 497.)
Stereometrie. Von Gymn.-Dir. Dr. P. Zühlke. (Bd. 532.)
— siehe auch Geometrie, Trigonometrie.
Stereoskop, Das, und seine Anwendungen. Von Prof. Th. Hartwig. Mit 40 Abb. und 19 Tafeln. (Bd. 135.)
Sterilisation siehe Desinfektion.
Stimme, Die menschliche St. und ihre Hygiene. Von Prof. Dr. P. H. Gerber. 2. Aufl. Mit 20 Abb. (Bd. 136.)
— siehe auch Rhetorik in Abt. III.
Strahlen, Sichtbare u. unsichtb. V. Prof. Dr. R. Börnstein u. Prof. Dr. W. Marckwald. 2. A. M. 85 Abb. (Bd. 64.)
Suggestion. Hypnotismus und Suggestion. V. Dr. E. Trömner. 2. Aufl. (Bd. 199.)
Süßwasser-Plankton, Das. Von Prof. Dr. O. Zacharias. 2. Aufl. Mit 57 Abb. und 1 Titelbild. (Bd. 156.)
Tiere, T. der Vorwelt. Von Prof. Dr. O. Abel. Mit 31 Abb. (Bd. 399.)
— Fortpflanzung d. T. V. Prof. Dr. R. Goldschmidt. M. 77 Abb. (Bd. 253.)
Tierkunde, Eine Einführung in die Zoologie. Von weil. Privatdozent Dr. K. Hennings. Mit 34 Abb. (Bd. 142.)
— Lebensbedingungen und Verbreitung der Tiere. Von Prof. Dr. O. Maas. Mit 11 Karten und Abb. (Bd. 139.)
— Zwiegestalt der Geschlechter in der Tierwelt (Dimorphismus). Von Dr. Fr. Knauer. Mit 37 Fig. (Bd. 148.)
— siehe auch Lebewesen, Haustiere.
Trigonometrie, Ebene, zum Selbstunterricht. Von Prof. Dr. P. Crantz. Mit 50 Fig. (Bd. 431.)
— siehe auch Geometrie, Stereometrie.
Tuberkulose, Die, ihr Wesen, ihre Verbreitung, Urs. Verhütung u. Heilung. Von Generalarzt Prof. Dr. W. Schumburg. 2. Aufl. M. 1 Taf. u. 8 Fig. (Bd. 47.)
Urtiere, Die. Einführung i. d. Wissenschaft v. Leben. V. Prof. Dr. R. Goldschmidt. 2. A. M. 44 Abb. (Bd. 160.)
Verbildungen, Körperliche, im Kindesalter und ihre Verhütung. Von Dr. M. David. Mit 26 Abb. (Bd. 321.)
Vererbung. Experimentelle Abstammungs- und Vererbungslehre. Von Dr. H. Lehmann. Mit 26 Abb. (Bd. 379.)
— Geistige Veranlagung u. Vererb. psychischer Eigenschaften. Von Dr. phil. u. med. Georg Sommer. (Bd. 512.)
Vogelleben, Deutsches. Von Prof. Dr. A. Voigt. (Bd. 221.)
Vogelzug und Vogelschutz. Von Dr. W. R. Eckardt. Mit 6 Abb. (Bd. 218.)
Volksnahrungsmittel siehe Ernährung u. V.
Wald, Der dtsche. V. Prof. Dr. H. Hausrath. M. 15 Abb. u. 2 Kart. (Bd. 153.)
Wärme, Die Lehre v. d. W. V. Prof. Dr. R. Börnstein. M. 33 Abb. (Bd. 172.)
— siehe auch Luft, Wasser, Licht, Wärme.
Weidwerk, Das deutsche. V. G. Frhr. v. Nordenflycht. (Bd. 436.)
Weltall. Der Bau des W. V. Prof. Dr. J. Scheiner. 4. A. M. 26 Fig. (Bd. 24.)
Weltäther siehe Molekule.
Weltbild. Das astronomische W. im Wandel der Zeit. Von Prof. Dr. S. Oppenheim. 2. Aufl. Mit 24 Abb. (Bd. 110.)
— siehe auch Astronomie.
Weltentstehung. Entstehung der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. Von Prof. Dr. M. B. Weinstein. 2. Aufl. (Bd. 223.)
Weltuntergang. Untergang der Welt und der Erde nach Sage und Wissenschaft. V. Prof. Dr. M. B. Weinstein. (Bd. 470.)
Wetter, Gut und schlecht. Von Dr. R. Henning. Mit 46 Abb. (Bd. 349.)
Wind und Wetter. Von Prof. Dr. L. Weber. 2. Aufl. Mit 28 Figuren und 3 Tafeln. (Bd. 55.)
Wirbeltiere. Vergleichende Anatomie der Sinnesorgane der W. Von Prof. Dr. W. Lubosch. Mit 107 Abb. (Bd. 282.)
Zahnheilkunde siehe Gebiß.
Zellen- und Gewebelehre siehe Anatomie des Menschen, Biologie.

VI. Recht, Wirtschaft und Technik.

Agrikulturchemie. Von Dr. P. Krische. Mit 21 Abb. (Bd. 314.)
Alkoholismus, Der. Von Dr. G. B. Gruber. Mit 7 Abb. (Bd. 103.)
Amerika. Aus dem amerik. Wirtschaftsleben. Von Prof. J. L. Laughlin. Mit 9 graphisch. Darstellung. (Bd. 127.)
Angestellte siehe Kaufmännische A.
Antike Wirtschaftsgeschichte. Von Dr. O. Neurath. (Bd. 258.)
Arbeiterschutz und Arbeiterversicherung. Von Prof. O. v. Zwiedineck-Südenhorst. 2. Aufl. (Bd. 78.)
— siehe auch soziale Bewegung.
Arbeitsleistungen des Menschen, Die. Von Prof. Dr. Boruttau. (Bd. 540.)

Arzneimittel und Genußmittel. Von Prof. Dr. O. Schmiedeberg. (Bd. 363.)
Arzt, Der. Seine Stellung und Aufgaben im Kulturleben der Gegenw. Von Dr. med. M. Fürst. (Bd. 265.)
Automobil, Das. Eine Einführung in Bau und Betrieb des modernen Kraftwagens. Von Ing. K. Blau. 3. Aufl. Mit 86 Abb. u. 1 Titelbild. (Bd. 166.)
Baukunde. Der Eisenbetonbau. V. Dipl.-Ing. E. Haimovici. 81 Abb. (Bd. 275.)
— siehe auch Städtebau.
Baukunst siehe Abt. III.
Beleuchtungswesen, Das moderne. Von Dr. H. Lux. Mit 54 Abb. (Bd. 433.)
Bevölkerungslehre. Von Prof. Dr. M. Haushofer. (Bd. 50.)
Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Blumen. Unsere Bl. und Pflanzen im Garten. Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 69 Abb. (Bd. 360.)
— **Unsere Blumen und Pflanzen im Zimmer.** Von Prof. Dr. U. Dammer. Mit 65 Abb. (Bd. 359.)
— siehe auch Garten.
Brauerei. Die Bierbrauerei. Von Dr. A. Bau. Mit 47 Abb. (Bd. 333.)
Buch. Wie ein Buch entsteht. Von Prof. A. W. Unger. 4. Aufl. Mit 7 Taf. u. 26 Abb. (Bd. 175.)
— siehe auch Abt. IV (Buchgewerbe, Schrift- u. Buchwesen).
Buchhaltung und Bilanz, Die kaufm. und ihre Beziehungen zur buchhalterischen Organisation, Kontrolle und Statistik. Von Dr. P. Gerstner. (Bd. 507.)
Chemie. Ch. in Küche und Haus. Von Dr. J. Klein. 3. Aufl. (Bd. 76.)
— **Ch. und Technologie der Sprengstoffe.** Von Prof. Dr. R. Biedermann. Mit 15 Fig. (Bd. 286.)
— siehe auch Technik, ferner Chemie in Abt. V.
Dampfmaschine, Die. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Wirkungsweise des Dampfes in Kessel und Maschine. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 393.)
— II: Ihre Gestaltung und ihre Verwendung. Mit 95 Abb. u. 1 Taf. (Bd. 394.)
Desinfektion, Sterilisation und Konservierung. Von Reg.- und Med.-Rat Dr. O. Solbrig. Mit 20 Abb. (Bd. 401.)
Deutsch: Deutscher Handel s. Handel. — Deutsches Handwerk, s. Handwerk. — Deutsche Verfassung s. Verfassung. — Deutsche Landwirtschaft s. Landwirtschaft. — Deutsche Reichsversicherung s. Reichsversicherung. — Deutsche Schiffahrt s. Schiffahrt. — Deutsches Weidwerk s. Weidwerk. — Deutsches Wirtschaftsleben s. Wirtschaftsleben. — Deutsches Zivilprozeßrecht s. Zivilprozeßrecht.
Drähte und Kabel, ihre Anfertigung und Anwendung in der Elektrotechnik. Von Telegrapheninspektor H. Brick. Mit 43 Abb. (Bd. 285.)
Ehe und Eherecht. Von Prof. Dr. L. Wahrmund. (Bd. 115.)
Eisenbahnwesen, Das. Von Eisenbahnbau- u. Betriebsinsp. a. D. Biedermann. 2. Aufl. Mit 56 Abb. (Bd. 144.)
— siehe auch Klein- u. Straßenbahnen, Verkehrsentwicklung.
Eisenbetonbau. Von Dipl.-Ing. E. Haimovici. Mit 81 Abb. (Bd. 275.)
Eisenhüttenwesen. Von weil. Geh. Bergrat Prof. Dr. H. Wedding. 4. Aufl. von Bergrat F. W. Wedding. Mit 15 Fig. (Bd. 20.)
Elektrische Kraftübertragung. Von Ing. B. Köhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)
Elektrochemie. Von Prof. Dr. K. Arndt. Mit 38 Abb. (Bd. 234.)
Elektrotechnik. Grundlagen der E. Von Dr. A. Roth. Mit 72 Abb. (Bd. 391.)
— siehe auch Drähte u. Kabel, Telegr.
Erbrecht. Testamentserrichtung und E. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)
Ernährung und Volksnahrungsmittel. Von weil. Prof. Dr. J. Frentzel. 2. Aufl. von Geh.-Rat Prof. Dr. N. Zuntz. Mit 7 Abb. und 2 Taf. (Bd. 19.)
Fabrikorganisation und Selbstkostenbestimmung. V. Prof. R. Rinkel. (Bd. 533.)
Farben und Farbstoffe. Ihre Erzeugung und Verwendung. Von Dr. A. Zart. Mit 31 Abbildungen im Text. (Bd. 483.)
— siehe auch Licht Abt. V.
Feuerungsanlagen, Industrielle, u. Dampfkessel. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 88 Abb. (Bd. 348.)
Finanzwissenschaft. Von Prof. Dr. S. P. Altmann. (Bd. 306.)
— siehe auch Geld.
Frauenarbeit. Ein Problem des Kapitalismus. Von Prof. Dr. R. Wilbrandt. (Bd. 106.)
Friedensbewegung, Die moderne. Von A. H. Fried. (Bd. 157.)
Funkentelegraphie, Die. Von Oberpostpraktikant H. Thurn. Mit 58 Illustr. 3. Aufl. (Bd. 167.)
Garten. Der Kleingarten. V. Redakt. Joh. Schneider. Mit 80 Abb. (Bd. 498.)
— **Der Hausgarten.** Von Gartenarchitekt W. Schubert. Mit 40 Abb. (Bd. 502.)
Gartenkunst. Geschichte der G. Von Reg.-Baumeister Chr. Ranck. Mit 41 Abb. (Bd. 274.)
Gartenstadtbewegung, Die. Von Generalsekretär H. Kampffmeyer. 2. Aufl. Mit 43 Abb. (Bd. 259.)
Geld, Das, und sein Gebrauch. Von G. Maier. (Bd. 398.)
— siehe auch Abt. IV (Münze).
Genußmittel siehe Kaffee, Kakao, Tabak, Arzneimittel und Genußmittel.

Gesundheitspolitik und Gesundheitsgesetzgebung. V. Obermedizinalrat Prof. Dr. M. v. Gruber. (Bd. 531.)
Getreidegräser siehe Kulturpflanzen.
Gewerblicher Rechtsschutz i. Deutschland. V. Patentanw. B. Tolksdorf. (Bd. 138.)
— siehe auch Urheberrecht.
Graphische Darstellung, Die. V. Prof. Dr. F. Auerbach. Mit 100 Abb. (Bd. 437.)
Handel. Geschichte des Welthandels. Von Prof. Dr. M. G. Schmidt. 2. Aufl. (Bd. 118.)
— **Geschichte des deutschen Handels.** Von Prof. Dr. W. Langenbeck. (Bd. 237.)
Handfeuerwaffen, Die. Ihre Entwicklung und Technik. Von Hauptmann R. Wetzig. Mit 69 Abb. (Bd. 364.)
Handwerk, Das deutsche, in seiner kulturgeschichtlichen Entwicklung. Von Geh. Schulrat Dr. E. Otto. 4. Aufl. Mit 33 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 14.)
Haushalt, siehe Bakterien, Chemie, Desinfektion, Jurisprudenz, Naturwissenschaften, Physik.
Häuserbau s. Baukunde, Heizung u. Lüftung, Beleuchtungsw., Wohnungseinr.
Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. Mit 67 Abb. (Bd. 196.)
Heizung und Lüftung. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Holz, seine Bearbeitung und Verwendung. V. Insp. J. Großmann. (Bd. 473.)
Hotelwesen, Das. Von P. Dammetienne. Mit 30 Abb. (Bd. 331.)
Hüttenwesen siehe Eisenhüttenwesen.
Japaner, Die, i. d. Weltwirtschaft. V. Prof. Dr. K. Rathgen. 2. Aufl. (Bd. 72.)
Immunitätslehre siehe Abwehrkräfte des Körpers in Abt. V.
Ingenieurtechnik. Bilder aus der J. Von Baur. K. Merckel. M. 43 Abb. (Bd. 60.)
— **Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit.** Von Geh. Regierungsrat M. Geitel. Mit 32 Abb. (Bd. 28.)
Jurisprudenz im häuslichen Leben. Für Familie u. Haushalt. Von Rechtsanwalt P. Bienengräber. 2 Bde. (Bd. 219, 220.)
— siehe auch Miete.
Kabel. Drähte u. K., i. Anfertigung u. Anwend. i. d. Elektrotechn. V. Telegr.-Insp. H. Brick. M. 43 Abb. (Bd. 285.)
Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Getränke. Von Prof. Dr. A. Wieler. Mit 24 Abb. und 1 Karte. (Bd. 132.)
Kälte, Die, ihr Wesen, ihre Erzeugung und Verwertung. Von Dr. H. Alt. Mit 45 Abb. (Bd. 311.)
Kaufmann. Das Recht des K. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 409.)
Kaufmännische Angestellte. Das Recht der k. A. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 361.)
Kinematographie. Von Dr. H. Lehmann. Mit 69 Abb. (Bd. 358.)
Klein- und Straßenbahnen. Von Oberingenieur a. D. A. Liebmann. Mit 85 Abb. (Bd. 322.)
— siehe auch Eisenbahnwesen, Verkehrsentwicklung.
Kohlen, Unsere. Von Bergassessor V. Kukuk. Mit 60 Abb. (Bd. 396.)
Kolonialbotanik. Von Prof. Dr. F. Tobler. Mit 21 Abb. (Bd. 184.)
Kolonisation, Innere. Von A. Brenning. (Bd. 261.)
Konservierung siehe Desinfektion.
Konsumgenossenschaft, Die. Von Prof. Dr. F. Staudinger. (Bd. 222.)
— s. auch Mittelstandsbewegung, Wirtschaftliche Organisationen.
Kraftanlagen siehe Feuerungsanlagen und Dampfkessel, Elektr. Kraftübertragung, Dampfmaschine, Wärmekraftmaschine, Wasserkraftmaschine.
Kraftübertragung, Die elektrische. Von Ing. P. Köhn. Mit 137 Abb. (Bd. 424.)
Krieg. Der K. im Zeitalter des Verkehrs und der Technik. Von Major A. Meyer. Mit 3 Abb. (Bd. 271.)
Kriegsschiff, Das. Von Geh. Marinebaurat Krieger. Mit 60 Abb. (Bd. 389.)
Kriminalistik, Moderne. Von Dr. A. Hellwig. Mit 18 Abb. (Bd. 476.)
— siehe auch Verbrechen.
Küche siehe Chemie in Küche und Haus, Physik in Küche und Haus.
Kulturpflanzen. Unsere wichtigsten K. (die Getreidegräser). V. Prof. Dr. K. Giesenhagen. 2. Aufl. M. 38 Fig. (Bd. 10.)
Landwirtschaft, Die deutsche. Von Dr. W. Claaßen. Mit 15 Abb. und 1 Karte. (Bd. 215.)
Landwirtschaftliche Maschinenkunde. Von Prof. Dr. G. Fischer. Mit 62 Abb. (Bd. 316.)
Luftfahrt, Die, ihre wissenschaftlichen Grundtagen und ihre technische Entwicklung. Von Dr. R. Nimführ. 3. Aufl. v. Dr. Fr. Huth. M. 60 Abb. (Bd. 300.)
Luftstickstoff, Der, u. s. Verw. V. Prof. Dr. K. Kaiser. M. 13 Abb. (Bd. 313.)
Lüftung, Heizung und L. Von Ingenieur J. E. Mayer. Mit 40 Abb. (Bd. 241.)
Maschinen siehe Hebezeuge, Dampfmaschine, Wärmekraftmaschine, Wasserkraftmaschine und die folg. Bände.
Maschinenelemente. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2. A. M. 175 Abb. (Bd. 301.)
Maschinenkunde siehe Landwirtschaftl. Maschinenkunde.
Maße und Messen. Von Dr. W. Block. Mit 34 Abb. (Bd. 385.)

Mechanik. Von Kais. Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. I: Die Mechanik der festen Körper. Mit 61 Abb. II: Die Mechanik der flüssigen Körper. Mit 34 Abb. III: Die Mechanik d. gasförmigen Körper. (Bd. 303—305.)

Metalle, Die. Von Prof. Dr. K. Scheid. 3. Aufl. Mit 11 Abb. (Bd. 29.)

Miete, Die, nach dem BGB. Von Rechtsanw. Dr. M. Strauß. (Bd. 194.)
— s. auch Jurisprudenz i. häusl. Leben.

Mikroskop, Das. Von Prof. Dr. Scheffer. 2. Aufl. Mit 99 Abb. (Bd. 35.)

Milch, Die, und ihre Produkte. Von Dr. A. Reitz. Mit 16 Abb. (Bd. 362.)

Mittelstandsbewegung, Die moderne. Von Dr. L. Müsselmann. (Bd. 417.)
— s. Konsumgenoss., Wirtschaftl. Org.

Naturwissenschaften im Haushalt. V. Dr. J. Bongardt. M. Abb. I. Wie sorgt die Hausfrau für die Gesundheit der Familie? II. Wie sorgt die Hausfrau für gute Nahrung? (Bd. 125, 126.)
— s. Chemie, Physik in Küche u. Haus.

Naturwissenschaften und Technik, Am sausenden Webstuhl der Zeit. Übers. ü. Wirkungen d. N. u. T. a. d. ges. Kulturleben. V. Prof. Dr. W. Launhardt. 3. Aufl. (Bd. 23.)

Nautik. Von Dr. J. Möller. Mit 50 Fig. (Bd. 255.)

Obstb. V. Dr. E. Voges. M. Abb. (Bd. 107.)

Optischen Instrumente, Die. Von Dr. M. v. Rohr. 2. Aufl. Mit 84 Abb. (Bd. 88.)

Organisationen, Die wirtschaftlichen. Von Privatdoz. Dr. E. Lederer. (Bd. 428.)

Ostmark, Die. Probl. ihr. Wirtschaftsgesch. V. Pr. Dr. W. Mitscherlich. (Bd. 351.)

Patente u. Patentrecht s. Gewerbl. Rechtssch.

Perpetuum mobile, Das. V. Dr. Fr. Ichar-Rubiner. Mit 38 Abb. (Bd. 462.)

Photochemie. Von Prof. Dr. G. Kümmell. Mit 23 Abb. (Bd. 227.)

Photographie, Die, ihre wissenschaftlichen Grundl. u. i. Anwendung. V. Dr. O. Prelinger. Mit 65 Abb. (Bd. 414.)
— **Die künstlerische Photographie.** Von Dr. W. Warstat. M. 12 Tafeln. (Bd. 410.)
— **Angewandte Liebhaber-Photographie, ihre Technik und ihr Arbeitsfeld.** Von Dr. W. Warstat. (Bd. 535.)

Physik in Küche und Haus. Von Prof. Dr. H. Speitkamp. Mit 51 Abb. (Bd. 478.)

Postwesen, Das. Entwicklung und Bedeutg. Von Postrat J. Bruns. (Bd. 165.)

Rechenmaschinen, Die, und das Maschinenrechnen. Von Reg.-Rat Dipl.-Ing. K. Lenz. Mit 43 Abb. (Bd. 490.)

Recht siehe Eherecht, Erbrecht, Gewerbl. Rechtsschutz, Jurispr., Kaufm., Kaufm. Angest., Urheberr., Verbrechen, Kriminalistik, Versflgsr., Wahlr., Zivilprozeßr.

Rechtsprobleme, Moderne. Von Prof. Dr. J. Kohler. 3. Aufl. (Bd. 128.)

Reichsversicherung, Die. Von Landesversich.-Assessor H. Seelmann. (Bd. 380.)

Salzlagerstätten, Die deutschen. Von Dr. C. Riemann. Mit 27 Abb. (Bd. 407.)

Schiffahrt, Deutsche, u. Schiffahrtspol. d. Ggnw. V. Prof. Dr. K. Thieß. (Bd. 169.)

Schiffbau siehe Kriegsschiff.

Schmuckst., Die, u. d. Schmucksteinindustr. V. Dr. A. Eppler. M. 64 Abb. (Bd. 376.)

Schutzgebiete, Unsere Sch. nach ihren wirtschaftl. Verhältn. J. Lichte d. Erdkunde darg. V. Dr. Chr. G. Barth. (Bd. 290.)

Soziale Bewegungen und Theorien bis zur modernen Arbeiterbewegung. Von G. Maier. 4. Aufl. (Bd. 2.)
— s. a. Arbeiterschutz u. Arbeiterversicher.

Sozialismus. Geschichte der sozialistischen Ideen im 19. Jahrh. Von Privatdoz. Dr. Fr. Muckle. I: Der ration. Soz. II: Proudhon u. d. entwicklungsgeschichtliche Sozialismus. (Bd. 269, 270.)

Spinnerei. Von Dir. Prof. M. Lehmann. Mit 35 Abb. (Bd. 338.)

Sprengst. Chemie u. Technol. d. Spr. V. Dr. R. Biedermann. M. Fig. (Bd. 286.)

Staat und Kirche in ihrem gegens. Verhältnis s. d. Reformation. V. Pfarrer Dr. phil. A. Pfannkuche. (Bd. 485.)

Statik. Mit Einschluß der Festigkeitslehre. V. Reg.-Baum. A. Schau. (Bd. 497.)

Stattstik. V. Pr. Dr. S. Schott. (Bd. 442.)

Stenographiesysteme, Die deutschen, ihre Entwickig. u. ihre Anwendg. V. R. Weinmeister, Lektor f. Stenogr. (Bd. 536.)

Strafe und Verbrechen. Von Dr. V. Polis. (Bd. 323.)

Straßenb. D. Klein- u. Strb. V. Obering. a. D. A. Liebmann. M. Abb. (Bd. 322.)

Tabak. Der Anbau, Handel u. Verarbeit. V. Jac. Wolf. M. 17 Abb. (Bd. 416.)

Technik, Die chemische. Bd. I. Von Dr. A. Müller. Mit 24 Abb. (Bd. 191.)

Tee, Kaffee, Tee, Kakao und die übrigen narkotischen Getränke. V. Prof. Dr. A. Wieler. M. Abb. u. 1 Karte. (Bd. 132.)

Telegraphie, Die, i. i. Entwickig. u. Bedeutg. V. Postrat J. Bruns. M. Fig. (Bd. 183.)
— **Telegraphen- und Fernsprechtechnik in ihrer Entwicklung.** Von Telegr.-Insp. H. Brick. Mit 58 Abb. (Bd. 235.)
— **Die Funkentelegr.** V. Oberpostpraktt. H. Thurn. M. Abb. 3. A. (Bd. 167.)
— siehe auch Drähte und Kabel.

Testamentserrichtung und Erbrecht. Von Prof. Dr. F. Leonhard. (Bd. 429.)

Thermodynamik siehe Wärmelehre.

Tiere. Die Fortpflanz. d. T. V. Prof. Dr. R. Goldschmidt. M. Abb. (Bd. 253.)

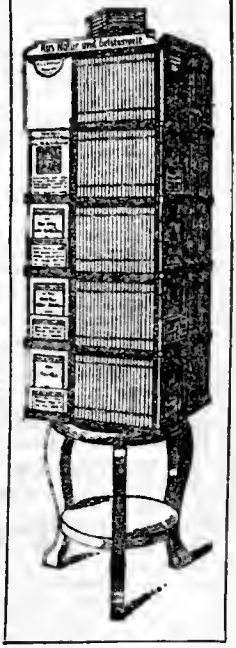
Tierzüchtung. Von Dr. G. Wilsdorf. Mit 30 Abb. auf 12 Tafeln. (Bd. 369.)

Uhr, Die. Von Reg.-Bauführer a. D. H. Bock. Mit 47 Abb. (Bd. 216.)
Urheberrecht D. Recht a. Schrift- u. Kunstw. V. Rechtsanw. Dr. R. Mothes. (Bd. 435.)
— siehe auch gewerblich. Rechtsschutz.
Verbrechen. Strafe und V. Geschichte und Organisation des Gefängniswesens. Von Dr. P. Pollitz. (Bd. 323.)
— Verbrechen und Aberglauben. Skizzen aus der volkskundlichen Kriminalistik. Von Dr. A. Hellwig. (Bd. 212.)
— Moderne Kriminalistik. Von Dr. A. Hellwig. Mit 18 Abb. (Bd. 476.)
Verbrecher. Die Psychologie des V. Von Dr. P. Pollitz. M. 5 Diagr. (Bd. 248.)
Verfassg. Grundz. d. V. d. Deutsch. Reiches. V. Pr. Dr. E. Loening. 4. A. (Bd. 34.)
— u. Verwalt. der deutschen Städte. Von Dr. Matth. Schmid. (Bd. 466.)
— Deutsch. Verfassgsr. i. geschichtl. Entwickl. V. Pr. Dr. E. Hubrich. 2. A. (Bd. 80.)
Verkehrsentwicklung i. Deutschl. 1800 b. z. Gw. V. Prof. Dr. W. Lotz. 2. A. (Bd. 15.)
Versicherungswesen. Grundzüge d. V. V. Prof. Dr. A. Manes. 2. A. (Bd. 105.)
— siehe Arbeiterschutz, Reichsversicherung
Volksnahrungsmittel siehe Ernährung u. V.
Waffentechnik siehe Handfeuerwaffen.
Wahlrecht, Das. Von Reg.-Rat Dr. O. Poensgen. (Bd. 249.)
Wärmekraftmaschinen, Die neueren. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. 2 Bde. I: Einführung in die Theorie u. d. Bau d. Maschinen für gasförmige u. flüssige Brennstoffe. 4. A. M. 42 Abb. (Bd. 21.)
— II: Gasmaschinen, Gas- und Dampfturbinen. 3. Aufl. Mit 45 Abb. (Bd. 86.)
— siehe auch Kraftanlagen.
Wärmelehre, Einführung in die technische. Von Geh. Bergrat Prof. R. Vater. (Bd. 516.)
Wasser, Das. Von Privatdozent Dr. O. Anselmino. Mit 44 Abb. (Bd. 291.)
— siehe Abt. V (Luft, Wasser, Licht, Wärme).
Wasserkraftmaschinen und die Ausnützung der Wasserkräfte. Von Geh. Reg.-Rat A. v. Ihering. Mit 73 Fig. (Bd. 228.)
Weberei. Von Prof. Paur. (Bd. 468.)
Weidwerk, Das deutsche. Von G. Frh. v. Nordenflycht. (Bd. 436.)
Weinbau und Weinbereitung. Von Dr. F. Schmitthenner. 34 Abb. (Bd. 332.)
Welthandel siehe Handel.
Wirtschaftliche Erdkunde. Von weil. Prof. Dr. Chr. Gruber. 2. Aufl. Bearb. von Prof. Dr. K. Dove. (Bd. 122.)
Wirtschaftsleben, Deutsch. Auf geograph. Grundl. gesch. V. weil. Prof. Dr. Gruber. 3. A. v. Dr. H. Reinlein. (Bd. 42.)
— Die Entwicklung des deutschen Wirtschaftslebens im letzten Jahrhundert. V. Prof. Dr. L. Pohle. 3. Aufl. (Bd. 57.)
— Deutschl. Stellung i. d. Weltwirtsch. V. Prof. Dr. P. Arndt. 2. A. (Bd. 179.)
— Aus dem amerikanischen Wirtschaftsl. V. Prof. J. L. Laughlin. (Bd. 127.)
Wirtschaftlichen Organisationen, Die. Von Privatdoz. Dr. E. Leberer. (Bd. 428.)
— s. Konsumgenoss., Mittelstandsbeweg.
Wirtschaftsgeschichte siehe Antike W.
Wohnhaus siehe Baukunde.
Wohnungseinrichtung. Von Reg.-Baumeister Bargiel. (Bd. 499.)
Zeitungswesen. V. Dr. H. Diez. (Bd. 328.)
Zivilprozeßrecht, Das deutsche. Von Rechtsanwalt Dr. M. Strauß. (Bd. 315.)
Zollwes. V. Regsrat Dr. Klein. (Bd. 508.)

Das drehbare Gestell

für die Sammlung **Aus Natur u. Geisteswelt,**

gefällig und maßvoll in der Form und praktisch im Gebrauch, will jedem Freunde der schmucken, gehaltvollen Bändchen deren Vereinigung zu einer wertvollen Handbibliothek erleichtern, um so die Freude an der ständigen Benutzung der liebgewordenen Bücher noch wesentlich zu erhöhen.



Preis des Gestells (für 500 Bände) aus dunkelbraun geräuchertem Holz mit Fuß M. 60.— ohne Fuß M. 55.—

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

DIE KULTUR DER GEGENWART
IHRE ENTWICKLUNG UND IHRE ZIELE
HERAUSGEGEBEN VON PROF. PAUL HINNEBERG

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

III. Teil. Die mathematischen, naturwissenschaftlichen und medizinischen Kulturgebiete. [19 Bände.]

(* erschienen, † unter der Presse.) In Halbfranz geh. jeder Band 2 Mark mehr.

*I. Abt. Die math. Wissenschaften. (1 Bd.)
Abteilungsleiter u. Bandredakteur: F. Klein. Bearb. v. P. Stäckel, H. E. Timerding, A. Voß, H. G. Zeuthen. 5 Lfgn. *1. Lfg. (Zenthen) geh. M. 3.— *II. Lfg. (Voß u. Timerding). M. 6.— *III. Lfg. (Voß) geh. M 5.—

II. Abt. Die Vorgeschichte der mod. Naturwissenschaften u. d. Medizin. (1 Bd.)
Bandredakteure: J. Ilberg u. K. Sudhoff.

III. Abt. Anorg. Naturwissenschaften.
Abteilungsleiter: E. Lecher.
*Bd. 1. Physik. Bandredakteur: E. Warburg. Bearb. v. F. Auerbach, F. Braun, E. Dorn, A. Einstein, J. Elster, F. Exner, R. Gans, E. Gehrcke, H. Geitel, E. Gumlich, F. Hasenöhrl, F. Henning, L. Holborn, W. Jäger, W. Kaufmann, E. Lecher, H. A. Lorentz, O. Lummer, St. Meyer, M. Planck, O. Reichenheim, F. Richarz, H. Rubens, E. v. Schweidler, H. Starke, W. Voigt, E. Warburg, E. Wiechert, M. Wien, W. Wien, O. Wiener, P. Zeemann. M. 22.-, M. 24.-
*Bd. 2. Chemie. Bandredakteur: E. v. Meyer. Allgem. Kristallographie u. Mineralogie. Bandredakteur: Fr. Rinne. Bearb. v. K. Engler, H. Immendorf, † O. Kelluer, A. Kossel, M. Le Blanc, R. Luther, E. v. Meyer, W. Nernst, Fr. Rinne, O. Wallach, O. N. Witt, L. Wöhler. Mit Abb. M. 18.—, M. 20.—
†Bd. 3. Astronomie. Bandred.: J. Hartmann.
Bd. 4. Geonomie. Bandredakteure: † I. B. Messerschmitt u. H. Benndorf.
Bd. 5. Geologie (einschl. Petrographie). Bandredakteur: A. Ruthpletz.
Bd. 6. Physiogeographie. Bandredakteur: E. Brückner. 1. Hälfte: Allg. Physiogeographie. 2. Hälfte: Spez. Physiogengraphie.

IV. Abt. Organ. Naturwissenschaften.
Abteilungsleiter: R. v. Wettstein.
*Bd. 1. Allgemeine Biologie. Bandredakteure: †C. Chun u. W. Johannsen, u. Mitw. v. A. Günthart. Bearheitet v. E. Baur, P. Boysen-Jensen, P. Claußen, A. Fischel, E. Godlewski, M. Hartmann, W. Johannsen, E. Laqueur, †B. Lidforss, W. Ostwald, O. Porsch, H. Przibram, E. Rádl, O. Rosenberg, W. Roux, W. Schleip, G. Senn, H. Spemann, O. zur Straßen. M. 21.—, M. 23.—
*Bd. 2. Zellen- und Gewehelehre, Morphologie und Entwicklungsgeschichte. 1. Botan. Teil. Bandredakteur: †E. Strashnrger. Bearb. v. W. Benecke u. †E. Strasburger. Mit Abh. M. 10.—, M. 12.— 2. Zoologischer Teil. Bandredakteur: O. Hertwig. Bearh. v. E. Gaupp, K. Heider, O. Hertwig, R. Hertwig, F. Keibel, H. Poll. Mit Abb. M. 16.—, M. 18.—
Bd. 3. Physiologie u. Ökologie. †1. Botan. Teil. Bandredakteur: G. Haberlandt. 2. Zoologischer Teil. Bandredakteur: M. Ruhner.
*Bd. 4. Abstammungslehre, Systematik, Paläontologie, Biogeographie. Bandredakteure: R. Hertwig u. R. v. Wettstein. Bearh. v. O. Ahel, L. E. V. Boas, A. Brauer, A. Engler, K. Heider, R. Hertwig, W. J. Jongmans, L. Plate, R. v. Wettstein. Mit Ahh. M. 20.—, M. 22.—

V. Abt. Anthropologie einschließl. naturwissensch. Ethnographie. (1 Bd.)
Bandredakteur: G. Schwalbe.

VI. Abt. Die medizin. Wissenschaften.
Abteilungsleiter: Fr. v. Müller.
Bd. 1. Die Geschichte der mod. Medizin. Bandredakteur: K. Sudhoff. Die Lehre von den Krankheiten. Bandredakteur: W. His.
Bd. 2. Die medizinischen Spezialfächer. Bandredakteur: Fr. v. Müller.
Bd. 3. Beziehungen der Medizin z. Volkswohl. Bandredakteur: M. v. Gruber.

VII. Abt. Naturphilosoph. u. Psychol.
*Bd. 1. Naturphilosophie. Bandredakteur: C. Stumpf. Bearh. v. E. Becher. M. 14.–, M. 16.–
Bd. 2. Psychologie. Bandred.: C. Stumpf.

VIII. Abt. Organisation der Forschung und des Unterrichts. (1 Bd.)
Bandredakteur: A. Gutzmer.

IV. Teil. Die technischen Kulturgebiete. [15 Bände.]

Abteilungsleiter: W. v. Dyck und O. Kammerer.

Bisher erschien:

Technik des Kriegswesens. Geh. M. 24.—, geb. M. 26.— [1913. Band 12.]
Inhalt (Bandredakteur M. Schwarte): Kriegsvorbereitung, Kriegsführung: M. Schwarte. – Waffentechnik, a) in ihren Beziehungen zur Chemie: O. Poppenberg; b) in ihren Beziehungen zur Metallurgie: W. Schwinning; c) in ihren Beziehungen zur Konstruktionslehre: W. Schwinning; d) in ihren Beziehungen zur optischen Technik: O. von Eberhard; e) in ihren Beziehungen zur Physik und Mathematik: O. Becker. — Technik des Befestigungswesens: J. Schröter. — Kriegsschiffbau: O. Kretzschmer. — Vorbereitung für den Seekrieg und Seekriegsführung: M. Glatzel. — Einfluß des Kriegswesens auf die Gesamtkultur: A. Kerstlng.

Probeheft mit Inhaltsübersicht des Gesamtwerkes, Probeabschnitten, Inhaltsverzeichnissen und Besprechungen umsonst und postfrei durch B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

Von deutscher Art und Arbeit

Schaffen und Schauen · Band I

3. Auflage. In Leinwand gebunden 5 Mark

Dies Buch will zeigen, was auf deutschem Boden deutsche Arbeit in deutscher Art geschaffen und gestaltet, worum unsere Heere draußen kämpfen und was, wie wir hoffen, nach siegreichem Kriege sich in neuer Blüte und Kraft entfalten soll.

Das deutsche Land als Boden deutscher Kultur, das deutsche Volk in seiner Eigenart, das Deutsche Reich in seinem Werden, die deutsche Volkswirtschaft nach ihren Grundlagen und in ihren wichtigsten Zweigen, der Staat und seine Aufgaben für Wehr und Recht, für Bildung wie für Förderung und Ordnung des sozialen Lebens, die bedeutsamsten wirtschaftspolitischen Fragen und wesentlichsten staatsbürgerlichen Bestrebungen, endlich die wichtigsten Berufsarten werden behandelt. Und es geschieht in einem Sinne, der geeignet ist, Verständnis zu wecken für all das reiche Leben in deutscher Vergangenheit und Gegenwart, den Willen im einzelnen zu entzünden, an ihm teilzuhaben, soweit es ihm nur möglich. Zugleich werden ihm die Wege gezeigt, wie er zum Wohle des Ganzen und zum eigenen Besten wirken, seine Lebensaufgabe mit dem vollen Gefühl der Selbstverantwortung sich stellen und sie durchführen kann.

Der zweite Band des Werkes unter dem Titel

Des Menschen Sein und Werden

2. Auflage. In Leinwand gebunden 5 Mark

darf im Kampf um „das Weltreich deutschen Geistes" als eine kleine Enzyklopädie der von uns gegen Barbarei und Krämergeist verteidigten Kultur gelten.

Es zeigt das Werden unserer geistigen Kultur, Wesen und Aufgaben der wissenschaftlichen Forschung im allgemeinen wie der Geistes- und Naturwissenschaften im besonderen, die Bedeutung der Philosophie, Religion und Kunst als Erfüllung tiefwurzelnder menschlicher Lebensbedürfnisse, ferner als Voraussetzung von all diesem die Stellung des Menschen in der Natur, die Grundbedingungen und Äußerungen seines geistigen Daseins und andererseits zusammenfassend die Gestaltung der Lebensführung nach den in dem Werke dargelegten Grundsätzen.

Nach übereinstimmendem Urteile von Männern des öffentlichen Lebens und der Schule, von Zeitungen und Zeitschriften der verschiedensten Richtungen löst das Buch darum in erfolgreichster Weise vor allem die Aufgabe, die deutsche Jugend in das deutsche Leben der Gegenwart in wahrhaft nationalem Geiste einzuführen.

Von dem Werk wurden bisher über 25000 Expl. verkauft.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Tierbau und Tierleben

in ihrem Zusammenhang betrachtet

von

Dr. Richard Hesse und **Dr. Franz Doflein**

Professor der Zoologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin

Professor der Zoologie an der Universität Freiburg i. Br.

Mit über 1200 Abbild. sowie 40 Tafeln in Schwarz- u. Buntdruck
nach Originalen von W. Engels, W. Heubach, E. L. Hoß, E. Kißling, W. Kuhnert, B. Liljefors, C. Merculiano, L. Müller-Mainz, P. Neuenborn, O. Voltrath u. a.

1. Band: Das Tier als selbständiger Organismus — **2. Band: Das Tier als Glied des Naturganzen**

Jeder Band in künstlerischem Original-Ganzleinenband gebunden Mark 20.–, in elegantem Halbfranzband Mark 22.–

Aus der gewaltigen Fülle naturwissenschaftlicher Schriften und Bücher, hervorgerufen durch das in immer weitere Kreise dringende Verlangen nach naturwissenschaftlicher und hauptsächlich biologischer Erkenntnis, ragt das Werk von Hesse und Doflein in mehr als einer Beziehung hervor. Sich nicht auf eine Beschreibung der einzelnen Tiere beschränkend, sondern in meisterhafter Weise das Typische, allen Lebewesen Gemeinsame herausgreifend, schildert es auf Grund der modernsten Forschungsergebnisse die tierische Organisation und Lebensweise, die Entwickelungs-, Fortpflanzungs- und Vererbungsgesetze, die Abhängigkeit der einzelnen Teile vom Gesamtorganismus und wiederum deren Einfluß auf das Ganze, kurz, alle die Fragen, die heute den Forscher wie den interessierten Laien bewegen. Dabei vereinigt das Werk mit unbedingter wissenschaftlicher Zuverlässigkeit eine seltene Klarheit der Sprache, die eine Lektüre desselben für jeden Gebildeten zu einem Genuß gestaltet. Eine große Anzahl künstlerischer Bilder und Tafeln, von ersten Künstlern besonders für das Werk hergestellt, unterstützt den Text, so daß die innere wie äußere Ausstattung als hervorragend bezeichnet werden muß.

Aus den Besprechungen:

„... Jeder Zoologe und jeder Freund der Tierwelt wird dieses Werk mit Vergnügen studieren, denn die moderne zoologische Literatur weist kein Werk auf, welches in dieser großzügigen Weise alle Seiten des tierischen Organismus so eingehend behandelt. **Das Werk wird sich bald einen Ehrenplatz in jeder biologischen Bibliothek erobern.**"
(E. Plate im Archiv f. Rassen- u. Gesellsch.-Biologie.)

„**Ein in jeder Hinsicht ausgezeichnetes Werk.** Es vereinigt sachliche, streng wissenschaftliche Behandlung des Gegenstandes mit klarer, jedem, der in rechter Mitarbeit an das Werk herantritt, verständlicher Darstellung. Jeder wird das Buch mit großem Gewinn und trotzdem großem Genuß lesen und Einblick in den Ernst der Wissenschaft gewinnen. Das schöne Werk darf **als Muster volkstümlicher Behandlung wissenschaftlicher Probleme** bezeichnet werden."
(Literarischer Jahresbericht des Dürerbundes.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Künstlerischer Wandschmuck
für Haus und Schule

Teubners Künstlersteinzeichnungen
Wohlfeile farbige Originalwerke erster deutscher Künstler bringen deutsche Kunst ins deutsche Haus

Die Sammlung enthält jetzt über 200 Blätter in den Größen

100 × 70 cm. Preis des Blattes M. 6.— | 55 × 42 cm. Preis des Blattes M. 4.—
75 × 55 cm. „ „ „ M. 5.— | 41 × 30 cm. „ „ „ M. 2.50

Rahmen in eigener Werkstätte sorgfältigst in den verschiedensten den Bildern angepaßten Ausführungen hergestellt, äußerst preiswürdig.

K. W. Diefenbachs Schattenbilder

„...Eines der formenschönsten Werke, die der deutschen Kunst gelungen sind..." (Avenarius.)

„Per aspera ad astra"

Album, die 34 Teilbilder des vollständigen Wandfriefes fortlaufend wiedergebend (Format 20½ × 25 cm) . . . . . M. 12.—
Teilbilder (42 × 80 cm) als Wandfriese pro Blatt M. 4.—, als kleinere Wandbilder (35 × 18 cm) pro Blatt M. 1.—

„Göttliche Jugend"

Teil I. Mappe mit Blatt 1–20 (25½ × 34 cm) M. 5.— Teil II. Mappe mit Blatt 21–40 (25½ × 34 cm) . . . . . M. 5.—
Einzelbilder daraus je 50 Pf., unter Glas und Leinwandeinfassung je . M. 1.—

Karl Bauers Federzeichnungen

Führer und Helden.

Bisher erschienen: 1. Kaiser Wilhelm II. 2. Der Reichskanzler. 3. Der deutsche Kronprinz. 4. Der Kronprinz von Bayern. 5. Herzog Albrecht von Württemberg. 6. Generalstabschef von Moltke. 7. Generalfeldmarschall von Hindenburg. 8. General von Emmich. 9. Großadmiral von Tirpitz. 10. Graf von Zeppelin. 11. Kaiser Franz Joseph. 12. Generalstabschef Conrad v. Hötzendorf. 13. Generalleut. v. Ludendorff. 14. Admiral Graf von Spee. 15. Kapitän von Müller. 16. Generalstabschef von Falkenhayn. 17. General von Beseler. 18. Generaloberst von Kluck. Die Reihe wird fortgesetzt.

Einzelblätter auf Karton (28 × 36 cm) M.—.50, Mappe mit 18 Blättern M. 3.50, mit 12 Blättern nach Wahl M. 2.50, mit 6 Blättern nach Wahl M. 1.50. Liebhaberausgabe, Blätter auf Karton aufgeklebt, in Leinwandmappe M. 8.— Einzelblätter auf Karton aufgeklebt M. 1.— Postkarten mit reellem Wiedergabe der Bildnisse Stück 10 Pf. Vollständ. Reihe (Nr. 1—18) in künstl. Umschlag M. 1.50, 12 Karten nach Wahl in künstl. Umschlag M. 1.—

Charakterköpfe zur deutschen Geschichte.

32 Federzeichnungen (28 × 36 cm). 1. Arminius. 2. Karl der Große. 3. Barbarossa. 4. Kaiser Maximilian I. 5. Gutenberg. 6. Dürer. 7. Luther. 8. Gustav Adolf. 9. Wallenstein. 10. Der Große Kurfürst. 11. Friedrich der Große. 12. Seydlitz. 13. Maria Theresia. 14. Lessing. 15. Schiller. 16. Goethe. 17. Humboldt. 18. Beethoven. 19. Pestalozzi. 20. Napoleon. 21. Königin Luise. 22. Blücher. 23. Körner. 24. Jahn. 25. Uhland. 26. Richard Wagner. 27. Menzel. 28. Krupp. 29. Kaiser Wilhelm I. 30. Bismarck. 31. Moltke. 32. Kaiser Wilhelm II.
Mappe mit 32 Blättern M. 4.50. Mit 12 Blätteen nach Wahl M. 2.50. Liebhaberausgabe 32 Blätter auf Karton in Leinwandmappe M. 10.— Einzelblätter auf Karton aufgeklebt M.—.60.

Charakterköpfe aus Deutschlands großer Zeit 1813.

16 Federzeichnungen (28 × 36 cm). König Friedrich Wilhelm III. Königin Luise. Kleist. Fichte. Schleiermacher. W. v. Humboldt. Stein. Hardenberg. Scharnhorst. York. Blücher. Gneisenau. Körner. Jahn. Arndt. Napoleon.
Mappe mit 16 Blättern . . . . M. 3.— Einzelblätter auf Karton aufgeklebt M.—.60

Rahmen. Leinwandeinfassung mit Glas M. 1.50. Dunkelbrauner Erlenrahmen zum Auswechseln M. 2.— Schwarz polierter Rahmen zum Auswechseln mit Glas M. 3.— Schwarz polierter Ovalrahmen mit Seidenschnur M. 3.50.

Vollständiger Katalog über künstlerischen Wandschmuck mit farbiger Wiedergabe von über 200 Blättern gegen Einsendung von 50 Pf. (Ausland: 60 Pf.)

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin